

## جوابات (Answers)

### مشق 7.1

- |   |  |  |
|---|--|--|
| 1. $-\frac{1}{2}\cos 2x$  | 2. $\frac{1}{3}\sin 3x$  | 3. $\frac{1}{2}e^{2x}$                     |
| 4. $\frac{1}{3a}(ax+b)^3$   | 5. $-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{4}{3}e^{3x}$   | 6. $\frac{4}{3}e^{3x} + x + C$             |
| 7. $\frac{x^3}{3} - x + C$  | 8. $\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + C$  | 9. $\frac{2}{3}x^3 + e^x + C$              |
| 10. $\frac{x^2}{2} + \log x  - 2x + C$                              |  | 11. $\frac{x^2}{2} + 5x + \frac{4}{x} + C$ |
| 12. $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + 8\sqrt{x} + C$ |  | 13. $\frac{x^3}{3} + x + C$                |
| 14. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$   | 15. $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + C$ |  |
| 16. $x^2 - 3\sin x + e^x + C$                                       | 17. $\frac{2}{3}x^3 + 3\cos x + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$                     |  |
| 18. $\tan x + \sec x + C$   | 19. $\tan x - x + C$   |  |
| 20. $2\tan x - 3\sec x + C$   | 21. $C$  |  |
| 22. $A$   |  |  |

### مشق 7.2

- |   |  |                         |
|---|--|-------------------------|
| 1. $\log(1+x^2) + C$                      | 2. $\frac{1}{3}(\log x )^3 + C$  | 3. $\log 1+\log x  + C$ |
| 4. $\cos(\cos x) + C$                     | 5. $-\frac{1}{4a}\cos 2(ax+b) + C$                                       |                         |
| 6. $\frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}} + C$ | 7. $\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + C$ |                         |

8.  $\frac{1}{6}(1+2x^2)^{\frac{3}{2}} + C$     9.  $\frac{4}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}} + C$     10.  $2\log|\sqrt{x}-1| + C$
11.  $\frac{2}{3}\sqrt{x+4}(x-8) + C$
12.  $\frac{1}{7}(x^3-1)^{\frac{7}{3}} + \frac{1}{4}(x^3-1)^{\frac{4}{3}} + C$     13.  $-\frac{1}{18(2+3x^3)^2} + C$
14.  $\frac{(\log x)^{1-m}}{1-m} + C$     15.  $-\frac{1}{8}\log|9-4x^2|$     16.  $\frac{1}{2}e^{2x+3} + C$
17.  $-\frac{1}{2e^{x^2}} + C$     18.  $e^{\tan^{-1}x} + C$     19.  $\log(e^x + e^{-x}) + C$
20.  $\frac{1}{2}\log(e^{2x} + e^{-2x}) + C$     21.  $\frac{1}{2}\tan(2x-3) - x + C$
22.  $-\frac{1}{4}\tan(7-4x) + C$     23.  $\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2 + C$
24.  $\frac{1}{2}\log|2\sin x + 3\cos x| + C$     25.  $\frac{1}{(1-\tan x)} + C$
26.  $2\sin\sqrt{x} + C$     27.  $\frac{1}{3}(\sin 2x)^{\frac{3}{2}} + C$     28.  $2\sqrt{1+\sin x} + C$
29.  $\frac{1}{2}(\log \sin x)^2 + C$     30.  $-\log(1+\cos x)$     31.  $\frac{1}{1+\cos x} + C$
32.  $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log|\cos x + \sin x| + C$     33.  $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log|\cos x - \sin x| + C$
34.  $2\sqrt{\tan x} + C$     35.  $\frac{1}{3}(1+\log x)^3 + C$     36.  $\frac{1}{3}(x+\log x)^3 + C$
37.  $-\frac{1}{4}\cos(\tan^{-1}x^4) + C$     38. D
39. B

مشق 7.3

1.  $\frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin(4x+10) + C$     2.  $-\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{2}\cos x + C$

3.  $\frac{1}{4} \left[ \frac{1}{12} \sin 12x + x + \frac{1}{8} \sin 8x + \frac{1}{4} \sin 4x \right] + C$

4.  $-\frac{1}{2} \cos(2x+1) + \frac{1}{6} \cos^3(2x+1) + C$

5.  $\frac{1}{6} \cos^6 x - \frac{1}{4} \cos^4 x + C$

6.  $\frac{1}{4} \left[ \frac{1}{6} \cos 6x - \frac{1}{4} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x \right] + C$

7.  $\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{12} \sin 12x \right] + C$

8.  $2 \tan \frac{x}{2} - x + C$

9.  $x - \tan \frac{x}{2} + C$

10.  $\frac{3x}{8} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$

11.  $\frac{3x}{8} + \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 8x + C$

12.  $x - \sin x + C$

13.  $2 (\sin x + x \cos x) + C$

14.  $-\frac{1}{\cos x + \sin x} + C$

15.  $\frac{1}{6} \sec^3 2x - \frac{1}{2} \sec 2x + C$

16.  $\frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C$

17.  $\sec x - \operatorname{cosec} x + C$

18.  $\tan x + C$

19.  $\log |\tan x| + \frac{1}{2} \tan^2 x + C$

20.  $\log |\cos x + \sin x| + C$

21.  $\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{2} + C$

22.  $\frac{1}{\sin(a-b)} \log \left| \frac{\cos(x-a)}{\cos(x-b)} \right| + C$

23. A

24. B

### مشق 7.4

1.  $\tan^{-1} x^3 + C$

2.  $\frac{1}{2} \log \left| 2x + \sqrt{1+4x^2} \right| + C$

3.  $\log \left| \frac{1}{2-x+\sqrt{x^2-4x+5}} \right| + C$

4.  $\frac{1}{5} \sin^{-1} \frac{5x}{3} + C$

5.  $\frac{3}{2\sqrt{2}} \tan^{-1} \sqrt{2} x^2 + C$

6.  $\frac{1}{6} \log \left| \frac{1+x^3}{1-x^3} \right| + C$

7.  $\sqrt{x^2-1} - \log|x+\sqrt{x^2-1}| + C$

8.  $\frac{1}{3} \log|x^3+\sqrt{x^6+a^6}| + C$

9.  $\log|\tan x + \sqrt{\tan^2 x + 4}| + C$

10.  $\log|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}| + C$

11.  $\frac{1}{6} \tan^{-1}\left(\frac{3x+1}{2}\right) + C$

12.  $\sin^{-1}\left(\frac{x+3}{4}\right) + C$

13.  $\log\left|x - \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}\right| + C$

14.  $\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{41}}\right) + C$

15.  $\log\left|x - \frac{a+b}{2} + \sqrt{(x-a)(x-b)}\right| + C$

16.  $2\sqrt{2x^2+x-3} + C$

17.  $\sqrt{x^2-1} + 2\log|x+\sqrt{x^2-1}| + C$

18.  $\frac{5}{6} \log|3x^2+2x+1| - \frac{11}{3\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$

19.  $6\sqrt{x^2-9x+20} + 34 \log\left|x - \frac{9}{2} + \sqrt{x^2-9x+20}\right| + C$

20.  $-\sqrt{4x-x^2} + 4 \sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$

21.  $\sqrt{x^2+2x+3} + \log|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}| + C$

22.  $\frac{1}{2} \log|x^2-2x-5| + \frac{2}{\sqrt{6}} \log\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right| + C$

23.  $5\sqrt{x^2+4x+10} - 7 \log|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}| + C$

24. B

25. B

مشق 7.5

1.  $\log\frac{(x+2)^2}{|x+1|} + C$

2.  $\frac{1}{6} \log\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$

3.  $\log|x-1| - 5\log|x-2| + 4\log|x-3| + C$

4.  $\frac{1}{2} \log|x-1| - 2 \log|x-2| + \frac{3}{2} \log|x-3| + C$

5.  $4 \log|x+2| - 2 \log|x+1| + C$

6.  $\frac{x}{2} + \log|x| - \frac{3}{4} \log|1-2x| + C$

7.  $\frac{1}{2} \log|x-1| - \frac{1}{4} \log(x^2+1) + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + C$

8.  $\frac{2}{9} \log \left| \frac{x-1}{x+2} \right| - \frac{1}{3(x-1)} + C$

9.  $\frac{1}{2} \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{4}{x-1} + C$

10.  $\frac{5}{2} \log|x+1| - \frac{1}{10} \log|x-1| - \frac{12}{5} \log|2x+3| + C$

11.  $\frac{5}{3} \log|x+1| - \frac{5}{2} \log|x+2| + \frac{5}{6} \log|x-2| + C$

12.  $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \log|x+1| + \frac{3}{2} \log|x-1| + C$

13.  $-\log|x-1| + \frac{1}{2} \log(1+x^2) + \tan^{-1} x + C$

14.  $3 \log|x-2| - \frac{5}{x-2} + C$

15.  $\frac{1}{4} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \tan^{-1} x + C$

16.  $\frac{1}{n} \log \left| \frac{x^n}{x^n+1} \right| + C$

17.  $\log \left| \frac{2-\sin x}{1-\sin x} \right| + C$

18.  $x + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}} - 3 \tan^{-1} \frac{x}{2} + C$

19.  $\frac{1}{2} \log \left( \frac{x^2+1}{x^2+3} \right) + C$

20.  $\frac{1}{4} \log \left| \frac{x^4-1}{x^4} \right| + C$

21.  $\log \left( \frac{e^x-1}{e^x} \right) + C$

22. B

23. A

مشق 7.6

1.  $-x \cos x + \sin x + C$

2.  $-\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C$

3.  $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

4.  $\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + C$

5.  $\frac{x^2}{2} \log 2x - \frac{x^2}{4} + C$
6.  $\frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9} + C$
7.  $\frac{1}{4} (2x^2 - 1) \sin^{-1} x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C$
8.  $\frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + C$
9.  $(2x^2 - 1) \frac{\cos^{-1} x}{4} - \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2} + C$
10.  $(\sin^{-1} x)^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x - 2x + C$
11.  $-\left[\sqrt{1-x^2} \cos^{-1} x + x\right] + C$
12.  $x \tan x + \log |\cos x| + C$
13.  $x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C$
14.  $\frac{x^2}{2} (\log x)^2 - \frac{x^2}{2} \log x + \frac{x^2}{4} + C$
15.  $\left(\frac{x^3}{3} + x\right) \log x - \frac{x^3}{9} - x + C$
16.  $e^x \sin x + C$
17.  $\frac{e^x}{1+x} + C$
18.  $e^x \tan \frac{x}{2} + C$
19.  $\frac{e^x}{x} + C$
20.  $\frac{e^x}{(x-1)^2} + C$
21.  $\frac{e^{2x}}{5} (2 \sin x - \cos x) + C$
22.  $2x \tan^{-1} x - \log(1+x^2) + C$
23. A
24. B

مشق 7.7

1.  $\frac{1}{2} x \sqrt{4-x^2} + 2 \sin^{-1} \frac{x}{2} + C$
2.  $\frac{1}{4} \sin^{-1} 2x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-4x^2} + C$
3.  $\frac{(x+2)}{2} \sqrt{x^2+4x+6} + \log \left| x+2 + \sqrt{x^2+4x+6} \right| + C$
4.  $\frac{(x+2)}{2} \sqrt{x^2+4x+1} - \frac{3}{2} \log \left| x+2 + \sqrt{x^2+4x+1} \right| + C$
5.  $\frac{5}{2} \sin^{-1} \left( \frac{x+2}{\sqrt{5}} \right) + \frac{x+2}{2} \sqrt{1-4x-x^2} + C$

6.  $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x-5} - \frac{9}{2}\log|x+2+\sqrt{x^2+4x-5}| + C$

7.  $\frac{(2x-3)}{4}\sqrt{1+3x-x^2} + \frac{13}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{13}}\right) + C$

8.  $\frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2+3x} - \frac{9}{8}\log\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x}\right| + C$

9.  $\frac{x}{6}\sqrt{x^2+9} + \frac{3}{2}\log|x+\sqrt{x^2+9}| + C$

10. A

11. D

مشق 7.8

1.  $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

2.  $\frac{35}{2}$

3.  $\frac{19}{3}$

4.  $\frac{27}{2}$

5.  $e - \frac{1}{e}$

6.  $\frac{15+e^8}{2}$

مشق 7.9

1. 2

2.  $\log\frac{3}{2}$

3.  $\frac{64}{3}$

4.  $\frac{1}{2}$

5. 0

6.  $e^4(e-1)$

7.  $\frac{1}{2}\log 2$

8.  $\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}}\right)$

9.  $\frac{\pi}{2}$

10.  $\frac{\pi}{4}$

11.  $\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$

12.  $\frac{\pi}{4}$

13.  $\frac{1}{2}\log 2$

14.  $\frac{1}{5}\log 6 + \frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\sqrt{5}$

15.  $\frac{1}{2}(e-1)$

16.  $5 - \frac{5}{2}\left(9\log\frac{5}{4} - \log\frac{3}{2}\right)$

17.  $\frac{\pi^4}{1024} + \frac{\pi}{2} + 2$

18. 0

19.  $3\log 2 + \frac{3\pi}{8}$

20.  $1 + \frac{4}{\pi} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

21. D

22. C

## مشق 7.10

1.  $\frac{1}{2} \log 2$

2.  $\frac{64}{231}$

3.  $\frac{\pi}{2} - \log 2$

4.  $\frac{16\sqrt{2}}{15}(\sqrt{2} + 1)$

5.  $\frac{\pi}{4}$

6.  $\frac{1}{\sqrt{17}} \log \frac{21+5\sqrt{17}}{4}$

7.  $\frac{\pi}{8}$

8.  $\frac{e^2(e^2 - 2)}{4}$

9. D

10. B

## مشق 7.11

1.  $\frac{\pi}{4}$

2.  $\frac{\pi}{4}$

3.  $\frac{\pi}{4}$

4.  $\frac{\pi}{4}$

5. 29

6. 9

7.  $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

8.  $\frac{\pi}{8} \log 2$

9.  $\frac{16\sqrt{2}}{15}$

10.  $\frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}$

11.  $\frac{\pi}{2}$

12.  $\pi$

13. 0

14. 0 15. 0

16.  $-\pi \log 2$

17.  $\frac{a}{2}$

18. 5 20. C

21. C

## باب 7 پر مشتمل متفرق مشق

1.  $\frac{1}{2} \log \left| \frac{x^2}{1-x^2} \right| + C$

2.  $\frac{2}{3(a-b)} \left[ (x+a)^{\frac{3}{2}} - (x+b)^{\frac{3}{2}} \right] + C$

3.  $-\frac{2}{a} \sqrt{\frac{(a-x)}{x}} + C$

4.  $-\left(1 + \frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}} + C$



5.  $2\sqrt{x} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\log(1+x^{\frac{1}{6}}) + C$
6.  $-\frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{4}\log(x^2+9) + \frac{3}{2}\tan^{-1}\frac{x}{3} + C$
7.  $\sin a \log|\sin(x-a)| + x \cos a + C$
8.  $\frac{x^3}{3} + C$
9.  $\sin^{-1}\left(\frac{\sin x}{2}\right) + C$
10.  $-\frac{1}{2}\sin 2x + C$
11.  $\frac{1}{\sin(a-b)} \log\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right| + C$
12.  $\frac{1}{4}\sin^{-1}(x^4) + C$
13.  $\log\left(\frac{1+e^x}{2+e^x}\right) + C$
14.  $\frac{1}{3}\tan^{-1}x - \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$
15.  $-\frac{1}{4}\cos^4 x + C$
16.  $\frac{1}{4}\log(x^4+1) + C$
17.  $\frac{[f(ax+b)]^{n+1}}{a(n+1)} + C$
18.  $\frac{-2}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin x}} + C$
19.  $\frac{2(2x-1)}{\pi} \sin^{-1}\sqrt{x} + \frac{2\sqrt{x-x^2}}{\pi} - x + C$
20.  $-2\sqrt{1-x} + \cos^{-1}\sqrt{x} + \sqrt{x-x^2} + C$
21.  $e^x \tan x + C$
22.  $-2\log|x+1| - \frac{1}{x+1} + 3\log|x+2| + C$
23.  $\frac{1}{2}\left[x \cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2}\right] + C$
24.  $-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{3}\right] + C$
25.  $e^{\frac{\pi}{2}}$
26.  $\frac{\pi}{8}$
27.  $\frac{\pi}{6}$
28.  $2\sin^{-1}\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}$
29.  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$
30.  $\frac{1}{40}\log 9$
31.  $\frac{\pi}{2} - 1$
32.  $\frac{\pi}{2}(\pi - 2)$

33.  $\frac{19}{2}$

40.  $\frac{1}{3}\left(e^2 - \frac{1}{e}\right)$

41. A

42. B

43. D

44. B

### مشق 8.1

1.  $\frac{14}{3}$

2.  $16 - 4\sqrt{2}$

3.  $\frac{32 - 8\sqrt{2}}{3}$

4.  $12\pi$

5.  $6\pi$

6.  $\frac{\pi}{3}$

7.  $\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

8.  $(4)^{\frac{2}{3}}$

9.  $\frac{1}{3}$

10.  $\frac{9}{8}$

11.  $8\sqrt{3}$

12. A

13. B

### مشق 8.2

1.  $\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{9}{4} \sin^{-1} \frac{2\sqrt{2}}{3}$

2.  $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3.  $\frac{21}{2}$

4. 4

5. 8

6. B

7. B

### باب 8 پڑنی متفرق مشق

1. (i)  $\frac{7}{3}$

(ii) 624.8

2.  $\frac{1}{6}$

3.  $\frac{7}{3}$

4. 9

5.

4

6.  $\frac{8a^2}{3m^3}$

7. 27

8.  $\frac{3}{2}(\pi - 2)$

جوابات 659

9.  $\frac{ab}{4}(\pi-2)$

10.  $\frac{9}{2}$

11. 2

12.

13. 7

14.  $\frac{7}{2}$

15.  $\frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4} \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3\sqrt{2}}$

16. D

17. C

18. C

19. B

مشق 9.1

-2 ترتیب 1؛ ڈگری 1

-4 ترتیب 2؛ ڈگری بیان نہیں کی گئی

-6 ترتیب 3؛ ڈگری 2

-8 ترتیب 1؛ ڈگری 1

-10 ترتیب 2؛ ڈگری 1

A -12

-1 ترتیب 4؛ ڈگری بیان نہیں کی گئی

-3 ترتیب 2؛ ڈگری 1

-5 ترتیب 2؛ ڈگری 1

-7 ترتیب 3؛ ڈگری 1

-9 ترتیب 2؛ ڈگری 1

D -11

مشق 9.2

11. D

12. D

مشق 9.3

1.  $y'' = 0$

2.  $xy y'' + x(y')^2 - y y' = 0$

3.  $y'' - y' - 6y = 0$

4.  $y'' - 4y' + 4y = 0$

5.  $y'' - 2y' + 2y = 0$

6.  $2xyy' + x^2 = y^2$

7.  $xy' - 2y = 0$

8.  $xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0$

9.  $xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0$

10.  $(x^2 - 9)(y')^2 + x^2 = 0$

11. B

12. C

## مشق 9.4

1.  $y = 2 \tan \frac{x}{2} - x + C$
2.  $y = 2 \sin(x + C)$
3.  $y = 1 + Ae^{-x}$
4.  $\tan x \tan y = C$
5.  $y = \log(e^x + e^{-x}) + C$
6.  $\tan^{-1} y = x + \frac{x^3}{3} + C$
7.  $y = e^{cx}$
8.  $x^{-4} + y^{-4} = C$
9.  $y = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$
10.  $\tan y = C(1-e^x)$
11.  $y = \frac{1}{4} \log[(x+1)^2(x^2+1)^3] - \frac{1}{2} \tan^{-1} x + 1$
12.  $y = \frac{1}{2} \log\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$
13.  $\cos\left(\frac{y-2}{x}\right) = a$
14.  $y = \sec x$
15.  $2y-1 = e^x(\sin x - \cos x)$
16.  $y-x+2 = \log\{x^2(y+2)^2\}$
17.  $y^2 - x^2 = 4$
18.  $(x+4)^2 = y+3$
19.  $(63t+27)^{\frac{1}{3}}$
20. 6.93%
21. Rs 1648
22.  $\frac{2 \log 2}{\log\left(\frac{11}{10}\right)}$
23. A

## مشق 9.5

1.  $(x-y)^2 = Cx e^{\frac{-y}{x}}$
2.  $y = x \log|x| + Cx$
3.  $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + C$
4.  $x^2 + y^2 = Cx$
5.  $\frac{1}{2\sqrt{2}} \log\left|\frac{x+\sqrt{2}y}{x-\sqrt{2}y}\right| = \log|x| + C$
6.  $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$

7.  $xy \cos\left(\frac{y}{x}\right) = C$

8.  $x \left[ 1 - \cos\left(\frac{y}{x}\right) \right] = C \sin\left(\frac{y}{x}\right)$

9.  $cy = \log \frac{y}{x} - 1$

10.  $ye^{\frac{x}{y}} + x = C$

11.  $\log(x^2 + y^2) + 2 \tan^{-1} \frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} + \log 2$

12.  $y + 2x = 3x^2 y$

13.  $\cot\left(\frac{y}{x}\right) = \log|ex|$

14.  $\cos\left(\frac{y}{x}\right) = \log|ex|$

15.  $y = \frac{2x}{1 - \log|x|} (x \neq 0, x \neq e)$

16. C

17. D

مشق 9.6

1.  $y = \frac{1}{5}(2 \sin x - \cos x) + Ce^{-2x}$

2.  $y = e^{-2x} + Ce^{-3x}$

3.  $xy = \frac{x^4}{4} + C$

4.  $y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x - x + C$

5.  $y = (\tan x - 1) + Ce^{-\tan x}$

6.  $y = \frac{x^2}{16}(4 \log x - 1) + Cx^{-2}$

7.  $y \log x = \frac{-2}{x}(1 + \log x) + C$

8.  $y = (1 + x^2)^{-1} \log|\sin x| + C(1 + x^2)^{-1}$

9.  $y = \frac{1}{x} - \cot x + \frac{C}{x \sin x}$

10.  $(x + y + 1) = Ce^y$

11.  $x = \frac{y^2}{3} + \frac{C}{y}$

12.  $x = 3y^2 + Cy$

13.  $y = \cos x - 2 \cos^2 x$

14.  $y(1 + x^2) = \tan^{-1} x - \frac{\pi}{4}$

15.  $y = 4 \sin^3 x - 2 \sin^2 x$

16.  $x + y + 1 = e^x$

17.  $y = 4 - x - 2e^x$       18. C

19. D

## باب 9 پر مبنی متفرق مشق

-1 (i) ترتیب 2؛ ڈگری 1 (ii) ترتیب 1؛ ڈگری 3

(iii) ترتیب 4؛ ڈگری بیان نہیں کی گئی

3.  $y' = \frac{2y^2 - x^2}{4xy}$

5.  $(x + yy')^2 = (x-y)^2 (1 + (y')^2)$

6.  $\sin^{-1} y + \sin^{-1} x = C$

8.  $\cos y = \frac{\sec x}{\sqrt{2}}$

9.  $\tan^{-1} y + \tan^{-1}(e^x) = \frac{\pi}{2}$

10.  $e^x = y + C$

11.  $\log |x - y| = x + y + 1$

12.  $ye^{2\sqrt{x}} = (2\sqrt{x} + C)$

13.  $y \sin x = 2x^2 - \frac{\pi^2}{2}$  ( $\sin x \neq 0$ )

14.  $y = \log \left| \frac{2x+1}{x+1} \right|, x \neq -1$

15. 31250

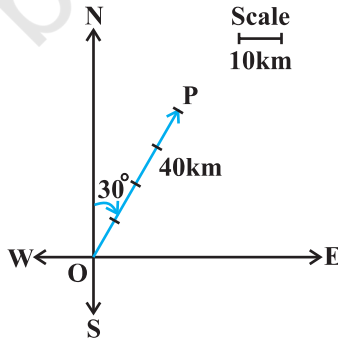
16. C

17. C

18. C

### مشق 10.1

-1 متصل شکل میں سمتیہ (Vector)  $\overline{OP}$  مطلوبہ نقل مکان بیان کرتا ہے۔



(iv) عددیہ

(iii) عددیہ

(ii) سمتیہ

(i) عددیہ -2

- (v) عددیہ (vi) سمتیہ  
 (i) عددیہ (ii) عددیہ (iii) سمتیہ (iv) سمتیہ -3  
 (v) عددیہ  
 (i) سمتیہ  $\vec{a}$  اور  $\vec{b}$  شروعاتی ساتھی ہیں (ii) سمتیہ  $\vec{a}$  اور  $\vec{b}$  برابر ہیں -4  
 (iii) سمتیہ  $\vec{a}$  اور  $\vec{c}$  ایک ہی خط پر موجود ہیں مگر برابر نہیں ہیں  
 (i) صحیح (ii) غلط (iii) غلط (iv) غلط -5

### مشق 10.2

1.  $|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = \sqrt{62}, |\vec{c}| = 1$
2. ممکن جوابات کے لاتعداد نمبر  
 3. ممکن جوابات کے لاتعداد نمبر  
 4.  $x = 2, y = 3$  اور  $-7$  اور  $6\hat{j}$  اور  $7\hat{i}$  -5
6.  $-4\hat{j} - \hat{k}$  7.  $\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{j} + \frac{2}{\sqrt{6}}\hat{k}$
8.  $\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$  9.  $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$
10.  $\frac{40}{\sqrt{30}}\hat{i} - \frac{8}{\sqrt{30}}\hat{j} + \frac{16}{\sqrt{30}}\hat{k}$  12.  $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$
13.  $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$  15. (i)  $-\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{4}{3}\hat{j} + \frac{1}{3}\hat{k}$  (ii)  $-3\hat{i} + 3\hat{k}$
16.  $3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$  18. (C) 19. (D)

### مشق 10.3

1.  $\frac{\pi}{4}$  2.  $\cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)$  3. 0

4.  $\frac{60}{\sqrt{114}}$       6.  $\frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}, \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}$       7.  $6|\vec{a}|^2 + 11\vec{a}\cdot\vec{b} - 35|\vec{b}|^2$
8.  $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=1$       9.  $\sqrt{13}$       10. 8
11.  $\frac{-3}{2}$       12. سمتیہ  $\vec{b}$  کوئی بھی سمتیہ ہو سکتا ہے      13.  $\frac{-3}{2}$
14. کوئی بھی دو غیر صفر عمودی سمتیہ  $\vec{a}$  اور  $\vec{b}$  لیجئے      15.  $\cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{102}}\right)$       18. (D)

### مشق 10.4

1.  $19\sqrt{2}$       2.  $\pm \frac{2}{3}\hat{i} \mp \frac{2}{3}\hat{j} \mp \frac{1}{3}\hat{k}$       3.  $\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}$
5.  $3, \frac{27}{2}$       6.  $|\vec{b}|=0$  یا  $|\vec{a}|=0$       8. نہیں؛ کوئی بھی دو غیر صفر ہم خط سمتیہ لیجئے۔
9.  $\frac{\sqrt{61}}{2}$       10.  $15\sqrt{2}$       11. (B)      12. (C)

### باب 10 پر مبنی متفرق مشق

1.  $\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j}$
2.  $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1; \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
3.  $\frac{-5}{2}\hat{i} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{j}$
4. نہیں؛ مثلث کے اضلاع دکھانے کے لیے  $\vec{a}, \vec{b}$  اور  $\vec{c}$  لیجئے
5.  $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$       6.  $\frac{3}{2}\sqrt{10}\hat{i} + \frac{\sqrt{10}}{2}\hat{j}$       7.  $\frac{3}{\sqrt{22}}\hat{i} - \frac{3}{\sqrt{22}}\hat{j} + \frac{2}{\sqrt{22}}\hat{k}$



8.  $2:3$                       9.  $3\bar{a} + 5\bar{b}$                       10.  $\frac{1}{7}(3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}); 11\sqrt{5}$
12.  $\frac{1}{3}(160\hat{i} - 5\hat{j} + 70\hat{k})$                       13.  $\lambda = 1$                       16. (B)
17. (D)                      18. (C)                      19. (B)

### مشق 11.1

1.  $0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$                       2.  $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$                       3.  $\frac{-9}{11}, \frac{6}{11}, \frac{-2}{11}$
5.  $\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{17}; \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-3}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}; \frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{-1}{\sqrt{42}}$

### مشق 11.2

4.  $\bar{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$  جہاں  $\lambda$  ایک حقیقی عدد ہے۔
5.  $\bar{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$  اور کارتیزی شکل  $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}$  ہے۔
6.  $\frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+5}{6}$
7.  $\bar{r} = (5\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k})$
8. خط کی سمتیہ مساوات:  $\bar{r} = \lambda(5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$   
 خط کی کارتیزی مساوات:  $\frac{x}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$
9. خط کی سمتیہ مساوات:  $\bar{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k} + \lambda(11\hat{k})$   
 خط کی کارتیزی مساوات:  $\frac{x-3}{0} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+5}{11}$
10. (i)  $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$                       (ii)  $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{8}{5\sqrt{3}}\right)$

11. (i)  $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$  (ii)  $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$
12.  $p = \frac{70}{11}$  14.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  15.  $2\sqrt{29}$
16.  $\frac{3}{\sqrt{19}}$  17.  $\frac{8}{\sqrt{29}}$

### مشق 11.3

1. (a) 0, 0, 1; 2 (b)  $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}$
- (c)  $\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}; \frac{5}{\sqrt{14}}$  (d) 0, 1, 0;  $\frac{8}{5}$
2.  $\vec{r} \cdot \left(\frac{3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}}{\sqrt{70}}\right) = 7$
3. (a)  $x + y - z = 2$  (b)  $2x + 3y - 4z = 1$
- (c)  $(s - 2t)x + (3 - t)y + (2s + t)z = 15$
4. (a)  $\left(\frac{24}{29}, \frac{36}{29}, \frac{48}{29}\right)$  (b)  $\left(0, \frac{18}{25}, \frac{24}{25}\right)$
- (c)  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  (d)  $\left(0, \frac{-8}{5}, 0\right)$
5. (a)  $[\vec{r} - (\hat{i} - 2\hat{k})] \cdot (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 0; x + y - z = 3$
- (b)  $[\vec{r} - (\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k})] \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) = 0; x - 2y + z + 1 = 0$
6. (a) نقاط ہم خطی ہیں۔ دیے ہوئے نقاط سے لاتعداد مستوی ہو کر گزر رہے گی۔
- (b)  $2x + 3y - 3z = 5$
7.  $\frac{5}{2}, 5, -5$  8.  $y = 3$  9.  $7x - 5y + 4z - 8 = 0$
10.  $\vec{r} \cdot (38\hat{i} + 68\hat{j} + 3\hat{k}) = 153$  11.  $x - z + 2 = 0$

12.  $\cos^{-1}\left(\frac{15}{\sqrt{731}}\right)$

(a)  $\cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$  (b) مستوی عمودی ہیں

(c)  $45^\circ$  (d) مستوی متوازی ہیں (e) مستوی متوازی ہیں

14. (a)  $\frac{3}{13}$

(b)  $\frac{13}{3}$

(c) 3

(d) 2

### باب 11 پر مبنی متفرق مشق

3.  $90^\circ$

4.  $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$

5.  $0^\circ$

6.  $k = \frac{-10}{7}$

7.  $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k})$

8.  $x + y + z = a + b + c$

9. 9

10.  $\left(0, \frac{17}{2}, \frac{-13}{2}\right)$

11.  $\left(\frac{17}{3}, 0, \frac{23}{3}\right)$

12. (1, -2, 7)

13.  $7x - 8y + 3z + 25 = 0$

14.  $p = \frac{3}{2} \text{ یا } \frac{11}{6} \text{ یا } \frac{7}{3}$

15.  $y - 3z + 6 = 0$

16.  $x + 2y - 3z - 14 = 0$

17.  $33x + 45y + 50z - 41 = 0$

18. 13

19.  $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(-3\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k})$

20.  $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

22. D

23. B

### مشق 12.1

- 1- عظیم  $Z=16$ ،  $(0,4)$  پر
- 2- قلیل  $Z=-12$ ،  $(4,0)$  پر
- 3- عظیم  $Z=\frac{235}{19}$ ،  $\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$  پر
- 4- قلیل  $Z=7$ ،  $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$  پر
- 5- عظیم  $Z=18$ ،  $(4,3)$  پر
- 6- قلیل  $Z=6$ ، ان سبھی نقاط پر جو اس قطعہ خط پر جو نقاط  $(6,0)$  اور  $(0,3)$  کو ملانے سے بنتا ہے۔
- 7- قلیل  $Z=300$ ،  $(60,0)$  پر؛
- 8- قلیل  $Z=600$ ، ان سبھی نقاط پر جو اس قطعہ خط پر جو نقاط  $(120,0)$  اور  $(60,30)$  کو ملانے سے بنتا ہے
- 9- قلیل  $Z=100$ ، ان سبھی نقاط پر جو اس قطعہ خط پر جو نقاط  $(0,50)$  اور  $(20,40)$  کو ملانے سے بنتا ہے
- عظیم  $Z=400$ ،  $(0,200)$  پر
- 9-  $Z$  کی کوئی عظیم قدر نہیں ہے۔
- 10- کوئی ممکن خط نہیں ہے، اس لیے  $Z$  کی کوئی عظیم قدر نہیں ہے۔

### مشق 12.2

- 1- ان تمام نقاط کی قلیل قدر = 160 روپیے ہے جو نقاط  $\left(\frac{8}{3}, 0\right)$  اور  $\left(2, \frac{1}{2}\right)$  سے بننے والے قطعہ خط پر واقع ہیں۔
- 2- ایک قسم کے ایک کی عظیم تعداد = 30 ہے اور دوسری طرح کے ایک کی تعداد 10 ہے۔
- 3- (i) 4 ٹینس کے ریکٹ اور 12 کرکٹ کے بلے۔
- (ii) عظیم منافع = 200 روپیے
- 4- نٹ کے 3 پیکیج اور بولٹ کے 3 پیکیج، عظیم فائدہ = 73.50 روپیے

- 5- اسکرو A کے 30 پیکیج اور اسکرو B کے 20 پیکیج؛ عظیم فائدہ = 410 روپے
- 6- 4 پیڈسٹل لیمپ اور 4 لکڑی کے شیڈ؛ عظیم فائدہ = 32 روپے
- 7- A قسم کے 8 سوینیر اور B قسم کے 20 سوینیر؛ عظیم فائدہ = 160 روپے
- 8- ڈیسک ٹاپ ماڈل کی 200 اکائیاں اور پورٹیبیل ماڈل (آسانی سے اٹھایا جانے والا) کی 150 اکائیاں؛  
عظیم قدر = 1150000 روپے
- 9- Minimise  $Z = 4x + 6y$

جس کے ساتھ یہ شرط ہے کہ  $3x + 6y \geq 80$ ،  $4x + 3y \geq 100$ ،  $x \geq 0$  اور  $y \geq 0$ ، جہاں

- $x$  اور  $y$  غذا  $F_1$  اور  $F_2$  کی بالترتیب اکائیوں کی تعداد ہیں؛ قلیل قدر = 104 روپے
- 10- سیاہی کھاد  $F_1$ ، 100 کلوگرام اور سیاہی کھاد  $F_2$ ، 80 کلوگرام؛ قلیل قیمت = 104 روپے
- 11- D

## باب 12 پر مبنی متفرق مشق

- 1- غذا P کے 40 پیکیٹ اور غذا Q کے 15 پیکیٹ؛ وٹامن A کی عظیم مقدار = 285 اکائیاں۔
- 2- برانڈ P کے 3 تھیلے اور برانڈ Q کے 6 تھیلے؛ آمیزہ کی قلیل قیمت خرید = 1950 روپے
- 3- آمیزہ کی کم سے کم قیمت خرید 112 روپے ہے (2 کلوگرام کھانہ X اور 4 کلوگرام کھانہ Y)
- 5- 40 ٹکٹ انتظامیہ (Executive) درجہ کے اور 160 ٹکٹ معاشی (Economy) درجہ کے؛  
عظیم منافع = 136000 روپے
- 6- E، D اور F کی طرف بالترتیب A سے: 10، 50، 40 اکائیاں؛ B سے: 50، 0، 0 اکائیاں اور قلیل  
قیمت خرید = 510 روپے
- 7- E، D اور F کی طرف بالترتیب A سے: 500، 3000 اور 3500 لیٹر؛ B سے: 4000، 0، 0 لیٹر؛  
قلیل قیمت پر خرید = 4400 روپے
- 8- برانڈ P کے 40 تھیلے اور برانڈ Q کے 100 تھیلے؛ نائٹروجن کی قلیل مقدار = 470 کلوگرام

9- برانڈ P کے 140 تھیلے اور برانڈ Q کے 50 تھیلے؛ نائیٹروجن کی عظیم مقدار = 595 کلوگرام

10- قسم A کی 800 گڑیاں اور قسم B کی 400 گڑیاں؛ عظیم منافع = 16000 روپے

### مشق 13.1

1.  $P(E|F) = \frac{2}{3}$ ,  $P(F|E) = \frac{1}{3}$
2.  $P(A|B) = \frac{16}{25}$
3. (i) 0.32 (ii) 0.64 (iii) 0.98
4.  $\frac{11}{26}$
5. (i)  $\frac{4}{11}$  (ii)  $\frac{4}{5}$  (iii)  $\frac{2}{3}$
6. (i)  $\frac{1}{2}$  (ii)  $\frac{3}{7}$  (iii)  $\frac{6}{7}$
7. (i) 1 (ii) 0
8.  $\frac{1}{6}$
9. 1
10. (a)  $\frac{1}{3}$ , (b)  $\frac{1}{9}$
11. (i)  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  (ii)  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$  (iii)  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{1}{4}$
12. (i)  $\frac{1}{2}$  (ii)  $\frac{1}{3}$  13.  $\frac{5}{9}$
14.  $\frac{1}{15}$  15. 0 16. C 17. D

### مشق 13.2

1.  $\frac{3}{25}$  2.  $\frac{25}{102}$  3.  $\frac{44}{91}$
- 4- A اور B غیر تالغ ہیں
- 5- A اور B غیر تالغ نہیں ہیں
- 6- E اور F غیر تالغ نہیں ہیں

جوابات 671

7. (i)  $p = \frac{1}{10}$  (ii)  $p = \frac{1}{5}$
8. (i) 0.12 (ii) 0.58 (iii) 0.3 (iv) 0.4
9.  $\frac{3}{8}$

-10 A اور B غیر تابع نہیں ہیں

11. (i) 0.18 (ii) 0.12 (iii) 0.72 (iv) 0.28
12.  $\frac{7}{8}$  13. (i)  $\frac{16}{81}$ , (ii)  $\frac{20}{81}$ , (iii)  $\frac{40}{81}$
14. (i)  $\frac{2}{3}$ , (ii)  $\frac{1}{2}$  15. (i), (ii) 16. (a)  $\frac{1}{5}$ , (b)  $\frac{1}{3}$ , (c)  $\frac{1}{2}$
17. D 18. B

مشق 13.3

1.  $\frac{1}{2}$  2.  $\frac{2}{3}$  3.  $\frac{9}{13}$  4.  $\frac{12}{13}$
5.  $\frac{22}{133}$  6.  $\frac{4}{9}$  7.  $\frac{1}{52}$  8.  $\frac{1}{4}$
9.  $\frac{2}{9}$  10.  $\frac{8}{11}$  11.  $\frac{5}{34}$  12.  $\frac{11}{50}$
13. A 14. C

مشق 13.4

- 0, 2, 4, X=6 -3 2, 1, X=0 -2 (i) اور (ii) -1

4. (i)

X	0	1	2
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(ii)

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(iii)

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

5. (i)

X	0	1	2
P(X)	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

(ii)

X	0	1
P(X)	$\frac{25}{36}$	$\frac{11}{36}$

6.

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{256}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{1}{625}$

7.

X	0	1	2
P(X)	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

8. (i)  $k = \frac{1}{10}$       (ii)  $P(X < 3) = \frac{3}{10}$       (iii)  $P(X > 6) = \frac{17}{100}$

(iv)  $P(0 < X < 3) = \frac{3}{10}$

9. (a)  $k = \frac{1}{6}$       (b)  $P(X < 2) = \frac{1}{2}$ ,  $P(X \leq 2) = 1$ ,  $P(X \geq 2) = \frac{1}{2}$

10. 1.5      11.  $\frac{1}{3}$       12.  $\frac{14}{3}$

13.  $\text{Var}(X) = 5.833$ ,  $\text{S.D} = 2.415$



14.

X	14	15	16	17	18	19	20	21
P(X)	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$

Mean = 17.53, Var(X) = 4.78 and S.D(X) = 2.19

15.  $E(X) = 0.7$  and  $\text{Var}(X) = 0.21$

16. B

17. D

### مشق 13.5

1. (i)  $\frac{3}{32}$

(ii)  $\frac{7}{64}$

(iii)  $\frac{63}{64}$

2.  $\frac{25}{216}$

3.  $\left(\frac{29}{20}\right)\left(\frac{19}{20}\right)^9$

4. (i)  $\frac{1}{1024}$

(ii)  $\frac{45}{512}$

(iii)  $\frac{243}{1024}$

5. (i)  $(0.95)^5$

(ii)  $(0.95)^4 \times 1.2$

(iii)  $1 - (0.95)^4 \times 1.2$

(iv)  $1 - (0.95)^5$

6.  $\left(\frac{9}{10}\right)^4$

7.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{20} [{}^{20}C_{12} + {}^{20}C_{13} + \dots + {}^{20}C_{20}]$

9.  $\frac{11}{243}$

10. (a)  $1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{50}$

(b)  $\frac{1}{2} \left(\frac{99}{100}\right)^{49}$

(c)  $1 - \frac{149}{100} \left(\frac{99}{100}\right)^{49}$

11.  $\frac{7}{12} \left(\frac{5}{6}\right)^5$

12.  $\frac{35}{18} \left(\frac{5}{6}\right)^4$

13.  $\frac{22 \times 9^3}{10^{11}}$

14. C

15. A

### باب 13 پر مبنی متفرق مشق

1. (i) 1

(ii) 0

2. (i)  $\frac{1}{3}$                       (ii)  $\frac{1}{2}$

3.  $\frac{20}{21}$

4.  $1 - \sum_{r=7}^{10} {}^{10}C_r (0.9)^r (0.1)^{10-r}$

5. (i)  $\left(\frac{2}{5}\right)^6$                       (ii)  $7\left(\frac{2}{5}\right)^4$                       (iii)  $1 - \left(\frac{2}{5}\right)^6$                       (iv)  $\frac{864}{3125}$

6.  $\frac{5^{10}}{2 \times 6^9}$

7.  $\frac{625}{23328}$

8.  $\frac{2}{7}$

9.  $\frac{31}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^4$

10.  $n \geq 4$

11.  $\frac{11}{216}$

12.  $\frac{1}{15}, \frac{2}{5}, \frac{8}{15}$

13.  $\frac{14}{29}$

14.  $\frac{3}{16}$

15. (i) 0.5

(ii) 0.05

16.  $\frac{16}{31}$

17. A

18. C

19. B



© NCERT not to be republished

## ضمیمہ کے مشمولات

### (SUPPLEMENTARY MATERIAL)

#### باب 7

$$\int (px + q)\sqrt{ax^2 + bx + c} dx. \quad 7.6.3$$

ہم A اور B مستقلوں کا انتخاب اس طرح کرتے ہیں کہ

$$\begin{aligned} px + q &= A \left[ \frac{d}{dx} (ax^2 + bx + c) \right] + B \\ &= A(2ax + b) + B \end{aligned}$$

دونوں طرف کے x کے ضربیوں اور مستقل ارکان کا موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2aA = p$$

$$Ab + B = q \quad \text{اور}$$

ان مساوات کو حل کر کے A اور B کی قدریں معلوم کی جاسکتی ہیں، اس طرح

$$\begin{aligned} A \int (2ax + b)\sqrt{ax^2 + bx + c} dx + B \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx \\ = AI_1 + BI_2 \end{aligned}$$

$$I_1 = \int (2ax + b)\sqrt{ax^2 + bx + c} dx \quad \text{جہاں}$$

$$(2ax + b)dx = dt, \text{ تب رکھیے، } ax^2 + bx + c = t$$

$$I_1 = \frac{2}{3}(ax^2 + bx + c)^{\frac{3}{2}} + C_1 \quad \text{اس لیے}$$

$$I_2 = \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx \quad \text{اس طرح}$$

کو نصابی کتاب کے صفحہ نمبر 360 پر 7.6.2 میں بتائے گئے طریقے سے مکملہ فارمولا استعمال کر کے

معلوم کیا گیا ہے۔

$$\int (px + q)\sqrt{ax^2 + bx + c} dx \quad \text{لہذا}$$

$$\text{مثال 25: } \int x\sqrt{1+x-x^2} dx \text{ معلوم کیجیے۔}$$

**حل:** مذکورہ بالا طریقے پر عمل کرتے ہوئے ہم مندرجہ ذیل عبارت لکھتے ہیں:

$$\begin{aligned} x &= A \left[ \frac{d}{dx} (1+x-x^2) \right] + B \\ &= A(1-2x) + B \end{aligned}$$

دونوں طرف کے  $x$  کے ضریبوں اور مستقل ارکان کا موازنہ کرنے پر ہمیں  $1 - 2A = 1$  اور  $A + B = 0$  حاصل ہوتا ہے۔

ان مساوات کو حل کرنے پر ہمیں  $A = -\frac{1}{2}$  اور  $B = \frac{1}{2}$  حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{1+x-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int (1-2x)\sqrt{1+x-x^2} dx + \frac{1}{2} \int \sqrt{1+x-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2 \quad \dots(1) \end{aligned}$$

غور کیجیے کہ  $I_1 = \int (1-2x)\sqrt{1+x-x^2} dx$

$1+x-x^2 = t$  رکھیے، اس کے بعد  $(1-2x)dx = dt$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int (1-2x)\sqrt{1+x-x^2} dx = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C_1 \quad \text{اس طرح} \\ &= \frac{2}{3} (1+x-x^2)^{\frac{3}{2}} + C_1 \end{aligned}$$

جہاں  $C_1$  کوئی مستقلہ ہے۔

اس کے بعد مندرجہ ذیل پر غور کیجیے:

$$I_2 = \int \sqrt{1+x-x^2} dx = \int \sqrt{\frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} dx$$

$$dx = dt \text{ رکھنے پر حاصل ہوتا ہے } x - \frac{1}{2} = t.$$

اس لیے

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} t \sqrt{\frac{5}{4} - t^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \sin^{-1} \frac{2t}{\sqrt{5}} + C_2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{(2x-1)}{2} \sqrt{\frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{5}{8} \sin^{-1} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C_2 \\ &= \frac{1}{4} (2x-1) \sqrt{1+x-x^2} + \frac{5}{8} \sin^{-1} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C_2 \end{aligned}$$

جہاں  $C_2$  کوئی مستقلہ ہے۔

$I_1$  اور  $I_2$  کی قدروں کو (1) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{1+x-x^2} dx &= -\frac{1}{3} (1+x-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8} (2x-1) \sqrt{1+x-x^2} \\ &\quad + \frac{5}{16} \sin^{-1} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C, \end{aligned}$$

جہاں  $C = -\frac{C_1+C_2}{2}$  ایک اور اختیاری مستقلہ ہے۔

مشق 7.7 کے آخر میں مندرجہ ذیل مشقیں شامل کرنی ہیں۔

$$(x+3)\sqrt{3-4x-x^2} - 14$$

$$(x+1)\sqrt{2x^2+3} - 13$$

$$x\sqrt{x+x^2} - 12$$

$$\frac{1}{3}(x^2 + x)^{\frac{3}{2}} - \frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}{8} + \frac{1}{16} \log \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x} \right| + C \quad -12$$

$$\frac{1}{6}(2x^2 + 3)^{\frac{3}{2}} + \frac{x}{2}\sqrt{2x^2+3} + \frac{3\sqrt{2}}{4} \log \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{3}{2}} \right| + C \quad -13$$

$$-\frac{1}{3}(3 - 4x - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2} \sin^{-1} \left( \frac{x+2}{\sqrt{7}} \right) + \frac{(x+2)\sqrt{3-4x-x^2}}{2} + C \quad -14$$

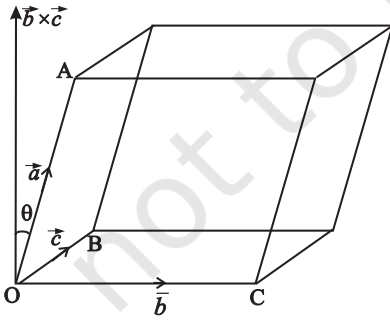
## باب 10

## 10.7 عددیہ ثلاثی حاصل ضرب (Scalar Triple Product)

فرض کیجیے کہ  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  اور  $\vec{c}$  تین سمتیہ ہیں۔  $\vec{a}$  اور  $(\vec{b} \times \vec{c})$  کا عددیہ (اسکیلر) حاصل ضرب یعنی  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  کو اس ترتیب میں  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  اور  $\vec{c}$  کا ثلاثی حاصل ضرب کہا جاتا ہے اور  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$  یا  $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$  کے ذریعے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

## مشاہدات



شکل 10.28

- 1- چونکہ  $(\vec{b} \times \vec{c})$  ایک سمتیہ ہے لہذا  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  ایک عددیہ مقدار ہے یعنی  $[\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}]$  عددیہ مقدار ہے۔
- 2- جیومیٹریائی طور پر، عددیہ ثلاثی حاصل ضرب کی قدر اس کعب نما کا حجم ہے جو تین سمتیوں  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  اور  $\vec{c}$  والے متصل اضلاع پر مشتمل ہے (شکل 10.28)۔

درحقیقت، کعب نما کے اساس کی تشکیل کرنے والے متوازی الاضلاع کا رقبہ  $|\vec{b} \times \vec{c}|$  ہے۔ اونچائی  $\vec{a}$  کی تظیل ہے جو  $\vec{b}$  اور  $\vec{c}$  پر مشتمل مستوی پر عمود کی سمت میں ہے اور  $\vec{b} \times \vec{c}$  کی سمت میں  $\vec{a}$  کے جزو کی قدر ہے۔ یعنی  $\frac{|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$ ۔ اس طرح کعب نما (parallelepiped) کا مطلوبہ حجم

$$= \frac{|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|}{|\vec{b} \times \vec{c}|} |\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

ہے۔

3- اگر  $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ،  $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$  اور  $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$  ہے تو

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (b_2c_3 - b_3c_2)\hat{i} + (b_3c_1 - b_1c_3)\hat{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\hat{k}$$

اور اسی لیے

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

4- اگر  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  اور  $\vec{c}$  کوئی بھی تین سمتیے ہیں تو

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

(تین سمتیوں کی دائری ترتیب میں تبدیلی کی وجہ سے عددیہ ثلاثی حاصل ضرب کی قدر میں تبدیلی نہیں آتی ہے)

فرض کیجیے کہ  $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ،  $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$  اور  $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$  تب مذکورہ بالا کا صرف مشاہدہ کر کے ہم مندرجہ ذیل حاصل کر سکتے ہیں:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$$= b_1 (a_3 c_2 - a_2 c_3) + b_2 (a_1 c_3 - a_3 c_1) + b_3 (a_2 c_1 - a_1 c_2)$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$$

اسی طرح قاری اس بات کی تصدیق کر سکتا ہے کہ

$$= [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

$$= [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] \quad \text{لہذا}$$

5- اسکیلر ثلاثی حاصل ضرب  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  میں نقطہ (Dot) اور کراس کو آپس میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$= [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] \quad \text{6- دراصل}$$

$$= [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$= \vec{a} \cdot (-\vec{c} \times \vec{b})$$

$$= -(\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}))$$

$$= -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}]$$

$$[\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}] = 0$$

7- دراصل

$$[\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}]$$

$$= [\vec{b}, \vec{a}, \vec{a}]$$



$$= \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{a})$$

$$= \vec{b} \cdot \vec{0} = 0 \quad (\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \text{ کیونکہ})$$

نوٹ: 7 میں دیا گیا مذکورہ بالا نتیجہ دو مساوی سمتیوں کے بلا لحاظ مقام درست ہے۔

### 10.7.1 تین سمتیوں کی ہم مستویت (Coplanarity)

**مسئلہ 1** تین سمتیوں  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  اور  $\vec{c}$  ہم مستوی ہیں اگر اور صرف اگر  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

**ثبوت:** فرض کیجیے کہ سمتیہ  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  اور  $\vec{c}$  ہم مستوی ہیں۔

اگر  $\vec{b}$  اور  $\vec{c}$  متوازی سمتیہ ہیں تب  $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$  اور اسی لیے  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

اگر  $\vec{b}$  اور  $\vec{c}$  متوازی سمتیہ نہیں ہے تو، چونکہ  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  اور  $\vec{c}$  ہم مستوی ہیں لہذا  $\vec{b} \times \vec{c}$ ،  $\vec{a}$  کے عمودی ہے۔

اس لیے  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

**معکوسی طور پر:** فرض کیجیے کہ  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$  ہے اگر  $\vec{a}$  اور  $\vec{b} \times \vec{c}$  دونوں غیر صفر ہیں۔ تب ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ  $\vec{a}$  اور  $\vec{b} \times \vec{c}$  عمودی سمتیہ ہیں۔ لیکن  $\vec{b} \times \vec{c}$ ،  $\vec{b}$  اور  $\vec{c}$  دونوں پر عمود ہے۔ لہذا  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  اور  $\vec{c}$  کو ایک ہی مستوی میں ہونا چاہیے یعنی یہ ہم مستوی ہیں۔ اگر  $\vec{a} = 0$  ہے تو  $\vec{a}$  کوئی بھی دو سمتیوں بالخصوص  $\vec{b}$  اور  $\vec{c}$  کے ہم مستوی ہے۔ اگر  $(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$  ہے تو  $\vec{b}$  اور  $\vec{c}$  متوازی سمتیہ ہیں اور اسی لیے  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  اور  $\vec{c}$  ہم مستوی ہیں کیونکہ کوئی بھی دو ویکٹر ہمیشہ ہی ان سمتیوں کے ذریعے متعین کردہ مستوی میں اور وہ سمتیہ جو ان دونوں سمتیوں میں سے کسی ایک سمتیہ پر عمود ہے وہ بھی اس مستوی میں ہوتا ہے۔

**نوٹ:** تین سمتیوں کی ہم مستویت کا استعمال کر کے چار نقطوں کی ہم مستویت پر بحث کی جاسکتی ہے۔ دراصل، چار نقطے A، B، C اور D ہم مستوی ہوتے ہیں اگر ویکٹر  $\vec{AB}$ ،  $\vec{AC}$  اور  $\vec{AD}$  ہم مستوی ہیں۔

**مثال 26:**  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  معلوم کیجیے اگر  $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ ،  $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$  اور  $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

**حل:** ہمارے پاس ہے:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

**مثال 27:** دکھائیے کہ سمتیہ  $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ،  $\vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$  اور  $\vec{c} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$  ہم مستوی ہیں۔

**حل:** ہمارے پاس ہے

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

اس طرح، مسئلہ 1 کے پیش نظر  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  اور  $\vec{c}$  ہم مستوی سمتیہ ہیں

**مثال 28:**  $\lambda$  کی قدر معلوم کیجیے اگر سمتیہ  $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ ،  $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$  اور  $\vec{c} = \lambda\hat{i} + 7\hat{j} + 3\hat{k}$  ہم مستوی ہیں۔

**حل:** چونکہ  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  اور  $\vec{c}$  ہم مستوی سمتیہ ہیں، لہذا  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ \lambda & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{یعنی}$$

$$\Rightarrow 1(-3 + 7) - 3(6 + \lambda) + 1(14 + \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0.$$

**مثال 29:** دکھائیے کہ چار نقاط A، B، C اور D بالترتیب مقامی سمتیہ  $-(\hat{j} + \hat{k})$ ،  $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$  اور  $3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k}$  کے ہم مستوی ہیں۔

**حل:** ہم جانتے ہیں کہ چار نقطے A، B، C اور D ہم مستوی ہوتے ہیں اگر تین سمتیے  $\overline{AB}$ ،  $\overline{AC}$  اور  $\overline{AD}$  ہم مستوی ہیں یعنی اگر

$$[\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}] = 0$$

$$\overline{AB} = -(j+k) - (4i + 5j + k) = -4i - 6j - 2k \quad \text{اب}$$

$$\overline{AC} = (3i + 9j + 4k) - (4i + 5j + k) = -i + 4j + 3k$$

$$\overline{AD} = 4(-i + j + k) - (4i + 5j + k) = -8i - j + 3k \quad \text{اور}$$

$$[\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}] = \begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{اس طرح}$$

لہذا A، B، C اور D ہم مستوی ہیں۔

**مثال 30:** ثابت کیجیے کہ  $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$

**حل:**

$$[\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}] = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot ((\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{c} + \vec{a}))$$

$$= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a})$$

$$= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}) \quad (\vec{c} \times \vec{c} = \vec{0} \text{ چونکہ})$$

$$= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) + \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) + \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

$$= [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}] + [\vec{a}, \vec{c}, \vec{a}] + [\vec{b}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{b}, \vec{a}] + [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$$

$$= 2[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \quad (\text{کیوں؟})$$

**مثال 31:** ثابت کیجیے کہ

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}]$$

حل: ہمارے پاس ہے

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}] &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times (\vec{c} + \vec{d})) \\ &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d}) \\ &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) \\ &= [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}] \end{aligned}$$

### مشق 10.5

1-  $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$  معلوم کیجیے، اگر  $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ،  $\vec{b} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$  اور  $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ۔  
(جواب 24)

2- دکھائیے کہ سمتیہ  $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ،  $\vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$  اور  $\vec{c} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$  ہم مستوی ہیں۔

3- اگر سمتیہ  $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ،  $3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$  اور  $\hat{i} + \lambda\hat{j} - 3\hat{k}$  ہم مستوی ہیں تو  $\lambda$  کی قدر معلوم کیجیے۔  
(جواب  $\lambda = 15$ )

4- فرض کیجیے  $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ،  $\vec{b} = \hat{i}$  اور  $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$  ہے۔ تب

(a) اگر  $c_1 = 1$  اور  $c_2 = 2$  ہے تو  $c_3$  کی وہ قدر معلوم کیجیے جس میں  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  اور  $\vec{c}$  ہم مستوی ہو جائیں۔  
(جواب  $c_3 = 2$ )

(b) اگر  $c_2 = -1$  اور  $c_3 = 1$  ہو تو دکھائیے کہ  $c_1$  کسی بھی قدر کے لیے  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  اور  $\vec{c}$  ہم مستوی نہیں ہو سکتے۔

5- دکھائیے کہ چار نقاط ہم مستوی ہیں اگر ان کے مقامی سمتیہ  $2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$ ،  $4\hat{i} + 8\hat{j} + 12\hat{k}$  اور  $3\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}$  ہیں۔

6-  $x$  کی وہ قدر معلوم کیجیے جس کے لیے چار نقطے  $A(3, 2, 1)$ ،  $B(4, x, 5)$ ،  $C(4, 2, -2)$  اور  $D(6, 5, -1)$  ہم مستوی ہیں۔  
(جواب  $x = 5$ )

7- اگر  $\vec{a} + \vec{b}$ ،  $\vec{b} + \vec{c}$  اور  $\vec{c} + \vec{a}$  ہم مستوی ہیں تو دکھائیے کہ سمتیہ  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  اور  $\vec{c}$  ہم مستوی ہیں۔

نوٹ

---

© NCERT  
not to be republished

نوٹ

---

© NCERT  
not to be republished