5260CH11

باب **11**

سہ ابعادی جیومیٹری
(THREE DIMENSIONAL GEOMETRY)

❖ "ریاضیاتی ایجاد کی قوتِ گردش استدلال نہیں بلکہ تصور اس کی وجہ ہے۔" اے–ڈی مارگن ❖

11.1 تعارف (Introduction)

لیونہارڈ ایلر (Leonhard Euler)
(1707–1783)

گیارھویں جماعت میں جب ہم تحلیلی جیومیٹری کا مطالعہ دو ابعاد میں کر رہے تھے، اور سہ ابعادی جیومیٹری کے تعارف میں ہم محض کارتیزی طریقوں (Cartesian Methods) تک ہی محدود تھے۔ اس کتاب کے پچھلے باب میں ہم نے سمتیوں کے کچھ بنیادی تصوروں کا مطالعہ کیا ہے۔ اب ہم سہ ابعادی جیومیٹری کے لیے سمتیہ الجبرا کا استعمال کریں گے سہ ابعادی جیومیٹری میں اس نظریہ کا مقصد اس مطالعہ کو آسان اور دلچسپ بنانا ہے۔

اس باب میں ہم ایک خط جو دو نقاط کو ملا رہا ہے کے سمتی کوسائن (Cosines) اور ان کی نسبت کا مطالعہ کریں گے اور ساتھ ہی مختلف شرائط کے تحت خطوط کی مساوات اور فضا میں مستویوں کا مطالعہ، دو خط کے درمیان زاویہ، دو مستوی، ایک خط اور ایک مستوی، دو عوجی خطوط کے درمیان کم از کم فاصلہ اور مستوی سے ایک

*سہ ابعادی جیومیٹری میں مختلف مشغلوں کے لیے اس کتاب سے استفادہ کیا جاسکتا ہے، "A Hand Book for designing Mathematics Laboratory in Schools," NCERT, 2005

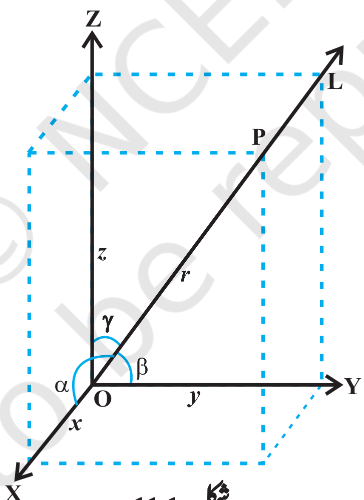
فاصلہ۔ اوپر کے زیادہ تر نتائج سمتی شکل میں حاصل ہوئے ہیں۔ تاہم، ہم ان نتائج کا کارتیزی شکل میں ترجمہ کریں گے، جو کہ ایک وقت میں صورت حال کی زیادہ صاف جیومیٹریائی اور تحلیلی تصویر دے سکے۔

11.2 ایک خط کی سمتی کوسائن اور سمتی نسبتیں

(Direction Cosines and Direction Ratios of a Line)

باب 10 سے، یاد کیجیے کہ اگر ایک براہِ راست خط L جو مبدا سے ہو کر گزر رہا ہے اور x، y اور z–محوروں کے ساتھ بالترتیب α، β اور γ زاویہ بناتا ہے، سمتی زاویے کہلاتے ہیں، تب ان زاویوں کے کوسائن جن کے نام $\cos\alpha$، $\cos\beta$ اور $\cos\gamma$ ہیں، براہِ راست خط L کے سمتی کوسائن کہلاتے ہیں۔

اگر ہم L کی سمت مخالف کر دیں، تب ان کے سمتی زاویہ ان کے تکملہ سے بدل دیے جاتے ہیں، یعنی $\pi - \alpha$، $\pi - \beta$ اور $\pi - \gamma$ سے۔ اس طرح سمتی کوسائن کے نشانات الٹے ہو جاتے ہیں۔



شکل 11.1

یہ ذہن نشین کر لیجیے کہ فضا میں ایک خط کو دو مخالف سمت میں بڑھایا جا سکتا ہے اور اس طرح یہ سمت کوسائن کے دو سیٹ رکھتا ہے۔ فضا میں ایک دیے ہوئے خط کے لیے راست کوسائن کا ایک سیٹ رکھنے کی ترتیب میں، ضروری ہے کہ ہم دیے ہوئے خط کو ایک راست خط کے طور پر لیں۔ ان اکلوتے راست کوسائن کو l، m اور n سے ظاہر کیا گیا ہے۔

ریمارک (Remark): اگر فضا میں دیا ہوا خط مبدا سے ہو کر نہیں گزرتا، تب اس کا راست کوسائن معلوم کرنے کی ترتیب میں

ہم مبدا سے گزرتا ہوا خط کھینچتے ہیں جو کہ دیے ہوئے خط کے متوازی ہے۔ اب مبدا سے ایک راست خط لیجیے اور اس کی سمتی کوسائن معلوم کیجیے کیونکہ دو متوازی خطوط یکساں سمتی کوسائن رکھتے ہیں۔

کوئی بھی تین اعداد جو کہ ایک خط کے سمتی کوسائن کے متناسب ہیں خط کی سمتی نسبت کہلاتے ہیں۔ اگر l, m, n ایک خط کے سمتی کوسائن ہیں اور a، b، c سمتی نسبتیں ہیں، تب کسی بھی غیر صفر $\lambda \in \mathbf{R}$ کے لیے، $a = \lambda l$، $b = \lambda m$ اور $c = \lambda n$ ہیں۔

> **نوٹ** کچھ مصنف سمتی نسبتوں کو سمتی اعداد بھی کہتے ہیں۔

مان لیجیے، a، b، c ایک خط کی سمتی نسبتیں ہیں اور مان لیجیے l, m اور n خط کے سمتی کوسائن ہیں (d.c's)۔ تب

کیونکہ k ایک مستقلہ ہے (مان لیجیے) $\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = k$،

اس لیے $$l = ak,\ m = bk,\ n = ck \qquad (1) \ldots$$

لیکن $$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

اس لیے $$k^2(a^2 + b^2 + c^2) = 1$$

یا $$k = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

اس طرح (1) سے خط کے d.c's ہیں

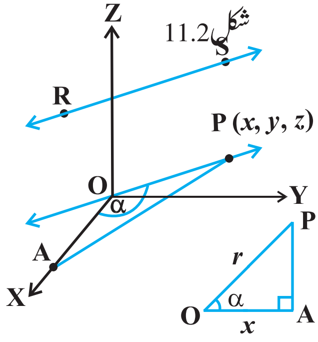
$$l = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},\ m = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},\ n = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

جہاں، k کے مطلوبہ نشان پر منحصر، مثبت یا منفی نشان l، m اور n کے لیے لیتے ہیں۔

کسی بھی خط کے لیے، اگر a، b، c ایک خط کی سمتی نسبتیں ہیں، تب، ka، kb، kc، $k \neq 0$، بھی سمتی نسبتوں کا ایک سیٹ ہے۔ اس طرح، ایک خط کے کسی بھی سمتی کوسائن کے دو سیٹ بھی متناسب ہیں۔ ساتھ ہی، کسی بھی خط کے لیے سمتی نسبتوں کے بہت سے لاتعداد سیٹ ہیں۔

11.2.1 ایک خط کے سمتی کوسائنوں کے درمیان رشتہ
(Relation between the direction cosines of a line)

ایک خط RS پر غور کیجیے جس کے سمتی کوسائن l، m، n ہیں۔ مبدا سے دیے ہوئے خط کے متوازی ایک خط کھینچیے اور اس خط پر ایک



شکل 11.2

نقطہ $P(x, y, z)$ لیجیے۔ P سے x–محور پر ایک عمود PA کھینچیے۔ (شکل 11.2)

مان لیجیے $OP = r$ ہے۔ تب $\cos\alpha = \frac{OA}{OP} = \frac{x}{r}$، یہ $x = lr$ دیتا ہے۔

اسی طرح، $y = mr$ اور $z = nr$

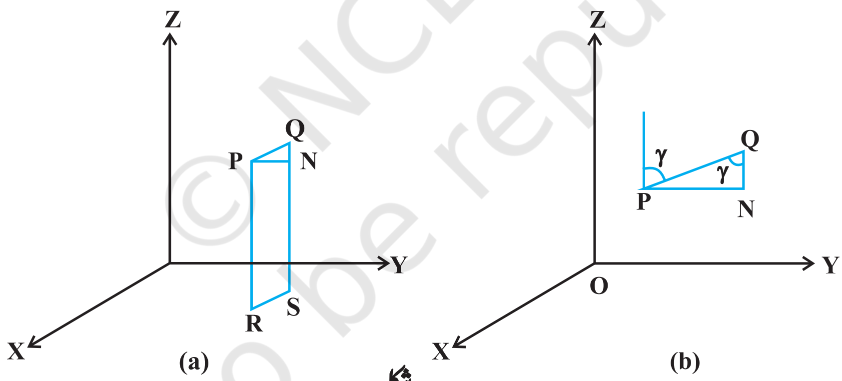
اس طرح $x^2 + y^2 + z^2 = r^2(l^2 + m^2 + n^2)$

لیکن $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

اس لیے $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

11.2.2 دو نقاط سے گزرتے ہوئے ایک خط کے سمتی کوسائن
(Direction cosines of a line passing through two points)

کیونکہ دو دیے ہوئے نقاط سے ایک اور صرف ایک ہی خط گزر سکتا ہے، ہم ایک خط کے سمتی کوسائین ذیل طریقے سے معلوم کر سکتے ہیں جو کہ دیے ہوئے نقاط $P(x_1, y_1, z_1)$ اور $Q(x_2, y_2, z_2)$ سے ہو کر گزر رہا ہے۔ (شکل 11.3(a))



شکل 11.3

مان لیجیے l, m, n خط PQ کے سمتی کوسائن ہیں اور مان لیجیے یہ x، y اور z–محوروں کے ساتھ بالترتیب α، β، اور γ زاویے بناتے ہیں۔

P اور Q سے xy–مستوی پر عمود کھینچیے جو کہ R اور S پر ملتے ہیں۔ P سے QS پر ایک عمود کھینچیے جو کہ N پر ملے۔ اب قائم مقام مثلث PNQ میں، $\angle PQN = \gamma$ (شکل 11.3(b))

اس لیے $\cos\gamma = \frac{NQ}{PQ} = \frac{z_2 - z_1}{PQ}$

اسی طرح $\cos\alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{PQ}$ اور

اس لیے، $P(x_1, y_1, z_1)$ اور $Q(x_2, y_2, z_2)$ نقاط سے بننے والے قطع خط کے سمتی کوسائن ہیں

$$\frac{x_2 - x_1}{PQ} ، \frac{y_2 - y_1}{PQ} ،$$

جہاں $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

> **نوٹ** $P(x_1, y_1, z_1)$ اور $Q(x_2, y_2, z_2)$ نقاط سے مل کر بننے والے قطع خط کے سمت کوسائن اس طرح بھی لیے جا سکتے ہیں۔
>
> $x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1$ یا $x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2$

مثال 1: اگر ایک خط x، y اور z محوروں کی مثبت سمت کے ساتھ بالترتیب $90°$، $60°$ اور $30°$ کے زاویے بناتا ہے، تب اس کی سمت کوسائن معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے خطوط کے d.c's l، m، n ہیں۔ تب $l = \cos 90° = 0$، $m = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$، ہیں

مثال 2: اگر ایک خط کی سمت نسبتیں $2, -1, -2$ ہیں۔ اس کی سمت کوسائن معلوم کیجیے۔

حل: سمت نسبتیں ہیں

$$\frac{}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}, \frac{}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}, \frac{}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}$$

یا $$\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}$$

مثال 3: اس خط کے سمت کوسائن معلوم کیجیے جو کہ دو نقاط $(-2,4,-5)$ اور $(1,2,3)$ سے ہو کر گزر رہا ہے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ دو نقاط $P(x_1, y_1, z_1)$ اور $Q(x_2, y_2, z_2)$ سے ہو کر گزرنے والے خط کے سمت کوسائن اس طرح د گئے ہیں

$$\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ}$$

جہاں $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

یہاں P $(-2,4,-5)$ ہے اور Q، $(1,2,3)$ ہے

اس لیے $PQ = \sqrt{(1-(-2))^2 + (2-4)^2 + (3-(-5))^2} = \sqrt{77}$

اس طرح دو نقاط کو ملانے والے خط کے سمت کوسائن ہیں۔

$$\frac{3}{\sqrt{77}},\ \frac{-2}{\sqrt{77}},\ \frac{8}{\sqrt{77}}$$

مثال 4: x، y اور z–محوروں کے سمت کوسائن معلوم کیجیے۔

حل: x– محور، x، x، y اور z– محوروں کے ساتھ بالترتیب $0°$، $90°$ اور $90°$ کا زاویہ بناتی ہے۔ اس لیے، x–محور کے سمت کو سائن $\cos 0°$، $\cos 90°$، $\cos 90°$ یعنی 1، 0، 0 ہیں۔ اسی طرح y–محور اور z–محور کے سمت کوسائین بالترتیب 0، 1، 0 اور 0، 0، 1 ہیں۔

مثال 5: دکھایئے کہ نقاط A(2,3,–4)، B(1,–2,3) اور C(3,8,–11) ہم خط ہیں۔

حل: A اور B کو ملانے والے خط کی سمت نسبتیں ہیں

1–2، 3–2–، 3+4، یعنی 1–، 5–، 7

B اور C کو ملانے والے خط کی سمت نسبتیں ہیں

1–3، 2+8، 3–11–، یعنی 2، 10، 14–

یہ صاف ہے کہ AB اور BC کی سمت نسبتیں متناسب ہیں، اس لیے، AB، BC کے متوازی ہے۔ لیکن نقطہ B، AB اور BC دونوں میں مشترک ہے۔ اس لیے A، B، C ہم خط نقاط ہیں۔

مشق 11.1

1۔ اگر ایک خط x، y اور z–محوروں کے ساتھ بالترتیب $90°$، $135°$ اور $45°$ کے زاویہ بناتا ہے، اس کی سمت کوسائن معلوم کیجیے۔

2۔ ایک خط کا سمت کوسائن معلوم کیجیے جو مختلف محوروں کے ساتھ برابر کے زاویہ بناتا ہے۔

3۔ اگر ایک خط کی سمت نسبتیں 18–، 12، 4– ہیں، تب اس کے سمت کوسائن کیا ہیں؟

4۔ دکھایئے کہ نقاط (2,3,4)، (–1,–2,1)، (5,8,7) ہم خط ہیں۔

5۔ ایک مثلث کے ضلعوں کے سمت کوسائن معلوم کیجیے جس کے راس (3,5,–4)، (–1,1,2) اور (–5,–5,–2) ہیں۔

11.3 فضا میں ایک خط کی مساوات (Equation of a Line in Space)

ہم نے گیارھویں جماعت میں ایک خط کی مساوات کا دو ابعاد میں مطالعہ کیا ہے، اب ہم ایک خط کی فضا میں سمتیہ اور کارتیزی مساوات کا مطالعہ کریں گے۔

ایک خط کو یکتا طور پر معلوم کرنا اگر

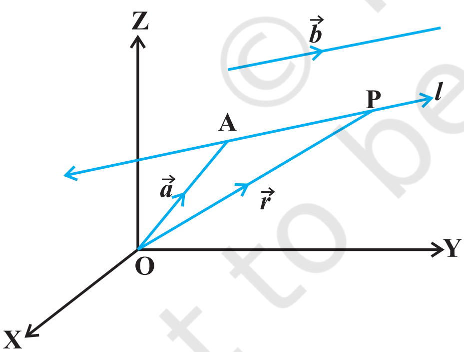
(i) یہ ایک دیے ہوئے نقطہ سے ہو کر گزرتا ہے اور دی ہوئی سمت رکھتا ہے، یا

(ii) یہ دو دیے ہوئے نقاط سے ہو کر گزرتا ہے۔

11.3.1 ایک خط کی مساوات جو ایک دیے ہوئے نقطے سے گزرتا ہے اور دیے ہوئے سمتیہ $\vec{b}$ کے متوازی ہے

(Equation of a line through a given point and parallel to a given vector $\vec{b}$)

مان لیجیے مبدا O کو مدنظر رکھتے ہوئے، $\vec{a}$ دیے ہوئے نقطہ 'A' کا مستطیلی مختص نظام میں مقامی سمتیہ ہے۔ مان لیجیے l ایک خط ہے جو کہ نقطہ A سے ہو کر گزرتا ہے اور دیے ہوئے سمتیہ $\vec{b}$ کے متوازی ہے۔ مان لیجیے $\vec{r}$ ایک اختیاری نقطہ P کا خط پر مقامی سمتیہ ہے۔ (شکل 11.4)



(شکل 11.4)

تب $\overrightarrow{AP}$ سمتیہ $\vec{b}$ کے متوازی ہے، یعنی، $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{b}$،

جہاں λ کوئی حقیقی عدد ہے۔

لیکن $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$

یعنی، $\lambda\vec{b} = \vec{r} - \vec{a}$

اس کے برعکس، پیرامیٹر λ کی ہر قدر کے لیے، یہ مساوات نقطہ P کے لیے خط پر مقامی سمتیہ دیتی ہے۔ اس طرح، خط کی، سمتیہ مساوات اس طرح دی گئی ہے

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\, \vec{b} \qquad \text{(1) ...}$$

ریمارک (Remark): اگر $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ ہے، تب a، b، c خط کی سمت نسبتیں ہیں اور اس کے برعکس، اگر a، b، c ایک خط کی سمت نسبتیں ہیں، تب $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ خط کے متوازی ہوں گی۔ یہاں، b کو $|\vec{b}|$ کے ساتھ درہم برہم نہیں کر سکتے۔

سمتی شکل سے کارتیزی شکل معلوم کرنا (Derivation of cartesian form from vector form)

مان لیجیے دیئے ہوئے نقطے A کے مختص (x_1, y_1, z_1) ہیں اور خط کی سمت نسبتیں a، b، c ہیں۔ کسی بھی نقطہ P کے مختصوں (x, y, z) پر غور کیجیے جو کہ ہیں۔ تب

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\,;\ \vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

اور

$$\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

ان قدروں کو مساوات (1) میں رکھنے اور $\hat{i}$، $\hat{j}$ اور $\hat{k}$ کے ضریبوں کا موازنہ کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = x_1 + \lambda a;\quad y = y_1 + \lambda b;\quad z = z_1 + \lambda c \qquad \text{(2)...}$$

یہ خط کی پیرامیٹرک مساواتیں ہیں۔ مساوات (2) سے پیرامیٹر کو خارج کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \qquad \text{(3)...}$$

یہ خط کی کارتیزی مساوات ہے۔

نوٹ اگر l، m، n خط کی سمت کوسائن ہیں، تب خط کی مساوات ہے

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

مثال 6: اس خط کی سمتیہ اور کارتیزی مساوات معلوم کیجیے جو نقطہ (5,2,–4) سے ہو کر گزرتا ہے اور جو کہ سمتیہ $3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$ کے متوازی ہے۔

حل: ہمارے پاس ہے

$$\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} \quad \text{اور} \quad \vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$$

اس لیے،خط کی سمتیہ مساوات ہے

$$\vec{r} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k})$$

اب،خط پر کسی بھی نقطہ $P(x, y, z)$ کا $\vec{r}$ مقامی سمتیہ ہے۔

اس لیے، $$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k})$$

$$= (5+3\lambda)\hat{i} + (2+2\lambda)\hat{j} + (-4-8\lambda)\hat{k}$$

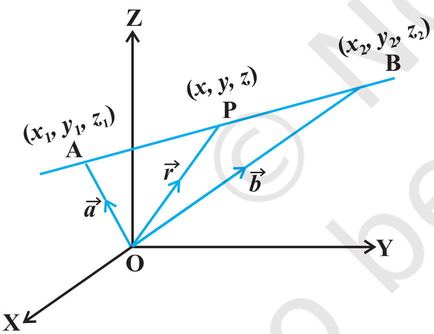
کوخارج کرنے پر،ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{-8}$$

جوکہ خط کی مساوات کارتیزی شکل میں ہے

11.3.2 دو دیے ہوئے نقاط سے گزرتے ہوئے ایک خط کی مساوات (Equation of a line passing through two given points)

مان لیجیے دو نقاط $A(x_1, y_1, z_1)$ اور $B(x_2, y_2, z_2)$ کے بالترتیب مقامی سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہیں جو کہ خط پر واقع ہیں (شکل 11.5) مان لیجیے $\vec{r}$ ایک اختیاری نقطہ $P(x, y, z)$ کا مقامی سمتیہ ہے، تب P خط پر ایک نقطہ ہے اگر اورصرف اگر $\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}$ اور $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ ہم خط سمتیہ ہیں۔اس لیے، P خط پر ہے اگراورصرف اگر



شکل 11.5

$$\vec{r} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{a})$$

یا $$\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}),\ \lambda \in R \qquad \ldots (1)$$

یہ خط کی سمتیہ مساوات ہے

سمتیہ شکل سے کارتیزی شکل معلوم کرنا (Derivation of cartesian form from vector form)

ہمارے پاس ہے

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ، $\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ اور $\vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$,

ان قدروں کو (1) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k} + \lambda[(x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}]$$

$\hat{i},\ \hat{j},\ \hat{k}$ کی قسم کے ضریبوں کی برابری کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = x_1 + \lambda\ (x_2 - x_1);\ y = y_1 + \lambda\ (y_2 - y_1);\ z = z_1 + \lambda\ (z_2 - z_1)$$

λ کو خارج کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

جو کہ کارتیزی شکل میں خط کی مساوات ہے۔

مثال 7: اس خط کے لیے سمتیہ مساوات معلوم کیجیے جو کہ نقاط (2,0,1–) اور (3,4,6) سے ہو کر گزر رہا ہے۔

حل: مان لیجیے نقاط $A(-1, 0, 2)$ اور $B(3, 4, 6)$ کے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ مقامی سمتیہ ہیں۔

تب $\vec{a} = -\hat{i} + 2\hat{k}$

اور $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$

اس لیے، $\vec{b} - \vec{a} = 4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$

مان لیجیے خط پر کسی بھی نقطہ کا پوزیشن سمتی $\vec{r}$ ہے۔ تب خط کی سمتیہ مساوات ہے

$$\vec{r} = -\hat{i} + 2\hat{k} + \lambda(4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k})$$

مثال 8: ایک خط کی کارتیزی مساوات ہے

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+6}{2}$$

خط کے لیے سمتیہ مساوات معلوم کیجیے۔

حل: دی ہوئی مساوات کا معیاری شکل سے موازنہ کرنے پر

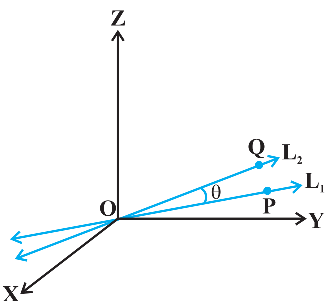
$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ $x_1 = -3,\ y_1 = 5,\ z_1 = -6;\ a = 2,\ b = 4,\ c = 2$

اس طرح، مطلوبہ خط نقطہ (–3,5,–6) سے ہوکر گزرتا ہے اور سمتیہ $2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ کے متوازی ہے۔ مان لیجیے، خط پر کسی بھی نقطہ کا مقامی سمتیہ $\vec{r}$ ہے، تب خط کی سمتیہ مساوات اس سے دی گئی ہے

$$\vec{r} = (-3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$$

11.4 دو خطوط کے درمیان زاویہ (Angle between two lines)



شکل 11.6

مان لیجیے دو خطوط L_1 اور L_2 مبدا سے ہوکر گزر رہے ہیں اور جن کی سمت نسبتیں بالترتیب a_1, b_1, c_1 اور a_2, b_2, c_2 ہیں۔ مان لیجیے خط L_1 پر نقطہ P ہے اور خط L_2 پر نقطہ Q ہے۔ جیسا کہ شکل 11.6 میں دیا گیا ہے، سمت خطوط OP اور OQ پر غور کیجیے۔ مان لیجیے OP اور OQ کے درمیان θ زاویہ حادہ ہے۔ اب یاد کیجیے کہ سمت قطع خط OP اور OQ بالترتیب جز و ترکیبی a_1, b_1, c_1 اور a_2, b_2, c_2 کے سمتیہ ہیں۔ اس لیے، ان کے درمیان زاویہ زاویہ θ اس طرح دیا گیا ہے

$$\cos\theta = \left| \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \right| \qquad \text{(I)} \ldots$$

خطوط کے درمیان زاویہ sin θ کی شکل میں اس طرح سے دیا گیا ہے

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2}{\left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right)\left(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right)\left(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2\right) - \left(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2\right)^2}}{\sqrt{\left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right)}\ \sqrt{\left(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)^2}}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \quad \text{(2)...}$$

نوٹ: اگر کسی وجہ سے خطوط L_1 اور L_2 مبدا سے ہو کر نہیں گزرتے، ہم خطوط L'_1 اور L'_2 لے سکتے ہیں جو کہ بالترتیب L_1 اور L_2 کے متوازی ہیں اور مبدا سے ہو کر گزرتے ہیں۔

اگر خطوط L_1 اور L_2 کے لیے سمت نسبتوں کی بجائے سمت کوسائن جن کے نام L_1 کے لیے l_1, m_1, n_1 اور L_2 کے لیے l_2, m_2, n_2 دیے ہوئے ہوں، تب (1) اور (2) ذیل شکل اختیار کر لیتی ہیں۔

$$\cos\theta = | l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 | \quad (\text{کیونکہ } l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 = l_2^2 + m_2^2 + n_2^2) \quad \text{(3)...}$$

اور

$$\sin\theta = \sqrt{(l_1 m_2 - l_2 m_1)^2 - (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (n_1 l_2 - n_2 l_1)^2} \quad \text{(4)...}$$

دو خطوط جن کی سمت نسبتیں a_1, b_1, c_1 اور a_2, b_2, c_2 ہیں، اس طرح ہیں

(i) عمودی، یعنی اگر $\theta = 90°$ ہے (1) سے

$$\boldsymbol{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0}$$

(ii) متوازی، یعنی، اگر $\theta = 0$ ہے (2) سے

$$\boldsymbol{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

اب، ہم دو خطوط کے درمیان زاویہ معلوم کرتے ہیں جب کہ ان کی مساوات دی گئی ہیں۔ اگر خطوط کے درمیان زاویہ حادہ θ ہے

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1 \quad \text{اور}$$

تب

$$\cos\theta = \left| \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1|\,|\vec{b}_2|} \right|$$

کارتیزی شکل میں، اگر خطوط کے درمیان زاویہ ہے

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1} \quad \text{(1) ...}$$

اور

$$\frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2} \quad \text{(2)...}$$

جہاں a_1, b_1, c_1 اور a_2, b_2, c_2 خطوط (1) اور (2) کی بالترتیب سمت نسبتیں ہیں، تب

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right|$$

مثال 9: خطوط کے جوڑوں کے درمیان زاویہ معلوم کیجیے جو کہ اس طرح دیے گئے ہیں۔

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

اور
$$\vec{r} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \mu(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$$

حل: یہاں $\vec{b}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ اور $\vec{b}_2 = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ ہے

دو خطوں کے درمیان زاویہ θ اس طرح دیا گیا ہے،

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right| = \left|\frac{(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})\cdot(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})}{\sqrt{1+4+4}\ \sqrt{9+4+36}}\right|$$

$$= \left|\frac{3+4+12}{3\times 7}\right| = \frac{19}{21}$$

اس لیے، $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$

مثال 10: خطوط کے جوڑوں کے درمیان زاویہ معلوم کیجیے۔

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}$$

اور
$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$$

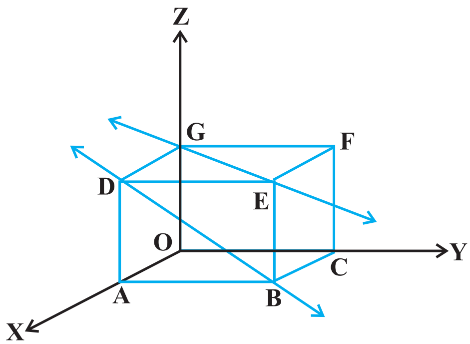
حل: پہلے خط کی سمت نسبتیں 3، 5، 4 ہیں اور دوسرے خط کی سمت نسبتیں (1، 1، 2) ہیں۔ اگر ان کا درمیانی زاویہ θ ہے، تب

$$\cos\theta = \left|\frac{3.1 + 5.1 + 4.2}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 4^2}\ \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}}\right| = \frac{16}{\sqrt{50}\ \sqrt{6}} = \frac{16}{5\sqrt{2}\ \sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{3}}{15}$$

اس لیے، مطلوبہ زاویہ $\cos^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{15}\right)$ ہے۔

11.5 دو خطوط کے درمیان کم از کم فاصلہ (Shortest Distance between two lines)

اگر فضا میں دو خطوط ایک نقطہ پر کاٹتے ہیں، تب ان کے درمیان کم از کم فاصلہ صفر ہے۔ ساتھ ہی، اگر فضا میں دو خطوط متوازی ہیں، تب ان کے درمیان کم از کم فاصلہ عمودی فاصلہ ہوگا، یعنی،
ایک خط کے ایک نقطہ سے عمود کی لمبائی جو کہ دوسرے خط پر کھینچا گیا ہے۔



اس کے آگے، فضا میں، کچھ ایسے خطوط ہیں جو نا تو ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں اور نہ ہی متوازی ہیں۔ حقیقت میں، اس طرح کے خطوط غیر ہم مستوی (non coplanar) ہیں اور عوجی خطوط (skew lines) کہلاتے ہیں۔ مثال کے طور پر ہم ایک کمرہ پر غور کرتے ہیں جس کا سائز x، y اور Z–محور کے ساتھ بالترتیب 1، 2، 3 اکائیاں ہے، **شکل 11.7**

خط GE جو کہ وتری طور پر چھت کے ساتھ پھیلا ہوا ہے اور DB جو کہ A کے اوپر ہے چھت کے ایک کونے سے سیدھے طور پر وتر کے ساتھ دیوار کے نیچے تک جاتا ہے۔ یہ عوجی خطوط ہیں کیونکہ یہ نا تو متوازی ہیں اور ساتھ ہی کبھی نہیں ملتے۔

دو خطوط کے درمیان کم از کم فاصلہ سے ہمارا مطلب ہے ایک خط پر ایک نقطہ کا دوسرے خط پر دوسرے نقطہ سے ملنا، تاکہ اس طرح حاصل ہونے والے قطع خط کا فاصلہ کم از کم ہو۔

عوجی خطوط کے لیے، کم از کم فاصلہ کا خط دونوں خطوط پر عمود ہوگا۔

11.5.1 دو عوجی خطوط کے درمیان فاصلہ (Distance between two skew lines)

اب ہم دو عوجی خطوط کے درمیان فاصلہ مندرجہ ذیل طریقہ سے معلوم کرتے ہیں:

مان لیجیے ان مساوات کے ساتھ l_1 اور l_2 دو عوجی خطوط ہیں (شکل 11.8)

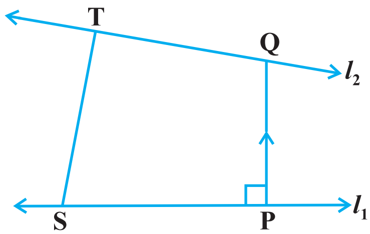
$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1 \qquad \text{(1)...}$$

اور

$$\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2 \qquad \text{(2) ...}$$

خط l_1 پر کوئی بھی نقطہ S لیجیے جس کا مقامی سمتیہ $\vec{a}_1$ ہے اور l_2 پر T لیجیے جس کا مقامی سمتیہ $\vec{a}_2$ ہے۔ تب کم از کم فاصلہ

کے سمتیہ کی قدر تظلیل حصے ST کے برابر ہوگی، جو کہ کم از کم فاصلہ کے خط کی
کے خط کی سمت کے ساتھ ہے (10.6.2 دیکھیے)



شکل 11.8

اگر $\overrightarrow{PQ}$ ، l_1 اور l_2 کے درمیان کم از کم فاصلے والا سمتیہ ہے، تب کیونکہ یہ دونوں $\vec{b}_1$ اور $\vec{b}_2$ پر عمود ہے، اس لیے $\overrightarrow{PQ}$ کے ساتھ اکائی سمتیہ $\hat{n}$ اس طرح ہوگا

$$\hat{n} = \frac{\vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \qquad \text{(3)...}$$

تب

$$\overrightarrow{PQ} = d\,\hat{n}$$

جہاں d کم از کم فاصلہ والے سمتیہ کی قدر ہے۔ مان لیجیے $\overrightarrow{ST}$ اور $\overrightarrow{PQ}$ کے درمیان زاویہ θ ہے۔ تب

$$PQ = ST\,|\cos\theta|$$

لیکن

$$\cos\theta = \left|\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{ST}}{|\overrightarrow{PQ}|\,|\overrightarrow{ST}|}\right|$$

$$= \left|\frac{d\,\hat{n}\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{d\ ST}\right| \qquad (\text{کیونکہ } \overrightarrow{ST} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1)$$

$$= \left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{ST\,|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right| \qquad (3 \text{ سے})$$

اس لیے، مطلوبہ کم از کم فاصلہ ہے

$$d = PQ = ST\,|\cos\theta|$$

یا

$$\boldsymbol{d = \left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right|}$$

کارتیزی شکل (Cartesian form)

خطوط کے درمیان کم از کم فاصلہ ہے

$$l_1 : \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$$

اور

$$l_2 : \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$$

$$\frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}}$$ ہے

11.5.2 متوازی خطوط کے درمیان فاصلہ (Distance between parallel lines)

اگر دو خطوط l_1 اور l_2 متوازی ہیں، تب وہ ہم مستوی ہیں۔ مان لیجیے خطوط اس سے دیے گئے ہیں

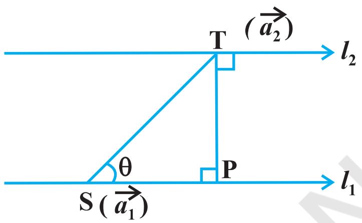
$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b} \quad \ldots (1)$$

اور

$$\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b} \quad (2)\ldots$$

جہاں $\vec{a}_1$، l_1 پر نقطہ S کا مقامی سمتیہ ہے اور $\vec{a}_2$ l_2 پر نقطہ T کا مقامی سمتیہ ہے شکل 11.9۔

کیونکہ l_1، l_2 ہم مستوی ہیں۔ اگر T سے خط l_1 پر عمود کا پیر P ہے،



شکل 11.9

تب خطوط l_1 اور l_2 کے درمیان فاصلہ =|TP|

مان لیجیے سمتیوں $\overrightarrow{ST}$ اور $\vec{b}$ کا درمیانی زاویہ θ ہے۔

تب

$$\vec{b} \times \overrightarrow{ST} = (|\vec{b}|\,|\overrightarrow{ST}| \sin\theta)\,\hat{n} \quad (3)\ldots\ldots\ldots\ldots$$

جہاں خطوط l_1 اور l_2 کی مستوی پر $\hat{n}$ ایک اکائی سمتیہ عمود ہے

لیکن

$$\overrightarrow{ST} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

اس لیے، (3) سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = |\vec{b}|\,\mathrm{PT}\,\hat{n} \quad (\text{کیونکہ } \mathrm{PT} = \mathrm{ST}\sin\theta)$$

یعنی

$$|\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)| = |\vec{b}|\,\mathrm{PT}\cdot 1 \quad (\text{کیونکہ } |\hat{n}| = 1 \text{ ہے})$$

اس لیے، د ہوئے متوازی خطوط کے درمیان فاصلہ ہے

$$d = |\overrightarrow{\mathrm{PT}}| = \left| \frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|} \right|$$

مثال 11: l_1 اور l_2 خطوط کے درمیان کم از کم فاصلہ معلوم کیجیے جن کی سمتیہ مساواتیں یہ ہیں

$$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda\,(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \quad (1)\ldots\ldots\ldots\ldots$$

اور

$$\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu\,(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}) \quad (2)\ldots\ldots\ldots\ldots$$

حل: (1)اور(2) کا بالترتیب $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ اور $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$ کے ساتھ موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے،

$$\vec{a}_1 = \hat{i} + \hat{j}, \quad \vec{b}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{a}_2 = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \text{ اور } \vec{b}_2 = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

اس لیے،

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \hat{i} - \hat{k}$$

اور

$$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - \hat{j} - 7\hat{k}$$

اس لیے

$$|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{9 + 1 + 49} = \sqrt{59}$$

اس لیے، دیے ہوئے خطوط کے درمیان کم از کم فاصلہ اس سے دیا گیا ہے

$$d = \left| \frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \right| = \frac{|3 - 0 + 7|}{\sqrt{59}} = \frac{10}{\sqrt{59}}$$

مثال 12: l_1 اور l_2 خطوط کے درمیان فاصلہ معلوم کیجیے جو کہ اس سے دیے گئے ہیں

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

اور

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

حل: دو خطوط متوازی ہیں (کیوں؟)۔ ہمارے پاس ہے

$$\vec{a}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}, \quad \vec{a}_2 = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} \text{ اور } \vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$$

اس لیے، خطوط کے درمیان فاصلہ اس طرح دیا گیا ہے

$$d = \left| \frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|} \right| = \left| \frac{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\sqrt{4 + 9 + 36}} \right|$$

یا

$$= \frac{|-9\hat{i} + 14\hat{j} - 4\hat{k}|}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{7}$$

مشق 11.2

1۔ دکھایئے کہ تین خطوط سمت کوسائن $\frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}$; $\frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13}$; $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$ کے ساتھ باہمی عمودی ہیں۔

2۔ دکھایئے کہ نقاط $(1,-1,2)$، $(3,4,-2)$ سے گزرنے والا خط، نقاط $(0,3,2)$ اور $(3,5,6)$ سے گزرنے والے خط پر عمود ہے۔

3۔ دکھایئے کہ نقاط $(4,7,8)$، $(2,3,4)$ سے گزرنے والا خط، نقاط $(-1,-2,1)$، $(1,2,5)$ سے گزرنے والے خط کے متوازی ہے۔

4۔ اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جو نقطہ $(1,2,3)$ سے ہو کر گزرتا ہے اور سمتیہ $3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ کے متوازی ہے۔

5۔ اس خط کی مساوات سمتیہ اور کارتیزی شکل میں معلوم کیجیے جو مقامی سمتیہ $2\hat{i} - j + 4\hat{k}$ کے ساتھ نقطہ سے ہو کر گزرتا ہے اور $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ کی سمت میں ہے۔

6۔ اس خط کی کارتیزی مساوات معلوم کیجیے جو کہ نقطہ $(-2,4,-5)$ سے ہو کر گزرتا ہے اور $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$ کے ذریعے د گئے خط کے متوازی ہے۔

7۔ ایک خط کی کارتیزی مساوات $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$ ہے۔ اس کی سمتیہ شکل لکھیے۔

8۔ اس خط کی سمتیہ اور کارتیزی مساوات معلوم کیجیے جو مبدا اور $(5,-2,3)$ سے ہو کر گزرتا ہے۔

9۔ اس خط کی سمتیہ اور کارتیزی مساوات معلوم کیجیے جو نقاط $(3,-2,-5)$ اور $(3,-2,6)$ سے ہو کر گزرتا ہے۔

10۔ درج ذیل خطوط کے جوڑوں کے درمیان زاویہ معلوم کیجیے:

(i) $\vec{r} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$

اور $\vec{r} = 7\hat{i} - 6\hat{k} + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

(ii) $\vec{r} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})$

اور $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - 56\hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k})$

11۔ مندرجہ ذیل خطوط کے جوڑوں کے درمیان زاویہ معلوم کیجیے:

(i) $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-4}{8}=\frac{z-5}{4}$ اور $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+3}{-3}$

(ii) $\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{8}$ اور $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$

12۔ p کی قدر معلوم کیجیے تا کہ خطوط $\frac{1-x}{3}=\frac{7y-14}{2p}=\frac{z-3}{2}$ اور $\frac{7-7x}{3p}=\frac{y-5}{1}=\frac{6-z}{5}$ ایک دوسرے پر زاویہ قائمہ بناتے ہیں۔

13۔ دکھایئے کہ خطوط $\frac{x-5}{7}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z}{1}$ اور $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ ایک دوسرے پر عمود ہیں۔

14۔ خطوط $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})+\lambda(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$

اور $\vec{r}=2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}+\mu(2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$

کے درمیان کم ازکم فاصلہ معلوم کیجیے۔

15۔ خطوط $\frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}$ اور $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{1}$ کے درمیان کم ازکم فاصلہ معلوم کیجیے۔

16۔ ان خطوط کے درمیان کم ازکم فاصلہ معلوم کیجیے جن کی سمتیہ مساوات ہیں

$$\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$$

اور $\vec{r}=4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k}+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$

17۔ ان خطوط کے درمیان کم ازکم فاصلہ معلوم کیجیے جن کی سمتیہ مساوات ہیں

$$\vec{r}=(1-t)\hat{i}+(t-2)\hat{j}+(3-2t)\hat{k}$$

اور $\vec{r}=(s+1)\hat{i}+(2s-1)\hat{j}-(2s+1)\hat{k}$

11.6 مستوی (Plane)

ایک مستوی کو یکتا طور پر معلوم کیا گیا ہے اگر درج ذیل میں سے ایک بھی معلوم ہے:

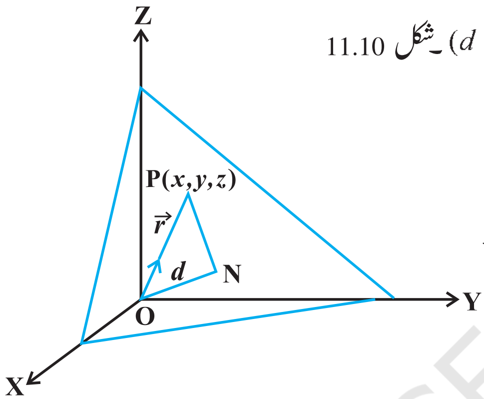
(i) مستوی پر نورمل اور مبدا سے اس کا فاصلہ دیا گیا ہے، یعنی، مستوی کی نورمل شکل میں مساوات۔

(ii) یہ ایک نقطہ سے ہوکر گزرتا ہے اور دی ہوئی سمت پر عمود ہے۔

(iii) یہ تین ہم خط نقاط سے ہوکر گزرتا ہے۔

اب ہم مستوی کی سمتی اور کارتیزی مساوات معلوم کریں گے۔

11.6.1 ایک مستوی کی نورمل شکل میں مساوات (Equation of a plane in normal form)



شکل 11.10

ایک مستوی پر غور کیجیے جس کا مبدا سے عمودی فاصلہ d ہے $(d \neq 0)$۔ شکل 11.10 اگر مستوی پر مبدا سے $\overline{ON}$ نورمل ہے، اور $\overline{ON}$ کے ساتھ $\hat{n}$ اکائی نورمل سمتیہ ہے۔ تب $\overline{ON} = d\,\hat{n}$۔ مان لیجیے مستوی پر P کوئی نقطہ ہے۔ اس لیے $\overline{NP}$، $\overline{ON}$ پر عمود ہے۔ اس لیے

$$\overline{NP} \cdot \overline{ON} = 0 \qquad \text{(1)} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

مان لیجیے $\vec{r}$ نقطہ P کا مقامی سمتیہ ہے، تب

$\overline{NP} = \vec{r} - d\,\hat{n}$ (کیونکہ $\overline{ON} + \overline{NP} = \overline{OP}$)

اس لیے، (1) ہوجاتی ہے

$$(\vec{r} - d\,\hat{n}) \cdot d\,\hat{n} = 0$$

یا
$$(\vec{r} - d\,\hat{n}) \cdot \hat{n} = 0$$

یا
$$\vec{r} \cdot \hat{n} - d\,\hat{n} \cdot \hat{n} = 0$$

یعنی،
$$\boldsymbol{\vec{r} \cdot \hat{n} = d} \quad \text{کیونکہ} \qquad \text{(2)} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

یہ مستوی کی مساوات کی سمتیہ شکل ہے۔

کارتیزی شکل (Cartesian form)

مساوات (2) ایک مستوی کی سمتیہ مساوات ہے، جہاں مستوی کے لیے $\hat{n}$ ایک اکائی سمتیہ ہے۔ مان لیجیے مستوی پر $P(x, y, z)$ کوئی بھی نقطہ ہے۔ تب

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$

مان لیجیے l, m, n، $\hat{n}$ کے سمت کوسائن ہیں۔تب

$$\hat{n} = l\,\hat{i} + m\,\hat{j} + n\,\hat{k}$$

اس لیے،مساوات(2) دیتی ہے

$$(x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k})\cdot(l\,\hat{i} + m\,\hat{j} + n\,\hat{k}) = d$$

یعنی،

$$\boldsymbol{lx + my + nz = d} \quad \text{.............(3)}$$

یہ مستوی کی نورمل شکل میں کارتیزی مساوات ہے۔

> **نوٹ** مساوات(3) یہ دکھاتی ہے کہ اگر $\vec{r}\cdot(a\,\hat{i} + b\,\hat{j} + c\,\hat{k}) = d$ ایک مستوی کی سمتیہ مساوات ہے، تب $ax + by + cz = d$ مستوی کی کارتیزی مساوات ہے، جہاں a، b اور c کی عام مستوی پر سمت نسبتیں ہیں۔

مثال 13: مستوی کی سمتیہ مساوات معلوم کیجیے جو کہ مبدا سے $\frac{6}{\sqrt{29}}$ فاصلے پر ہے اور اس کا نورمل سمتیہ مبدا سے $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ہے۔ساتھ ہی اس کی کارتیزی شکل بھی معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے $\vec{n} = 2\,\hat{i} - 3\,\hat{j} + 4\,\hat{k}$ ہے۔تب

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{2\,\hat{i} - 3\,\hat{j} + 4\,\hat{k}}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{2\,\hat{i} - 3\,\hat{j} + 4\,\hat{k}}{\sqrt{29}}$$

اس لیے،مستوی کی مطلوبہ مساوات یہ ہے

$$\vec{r}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\,\hat{i} + \frac{-3}{\sqrt{29}}\,\hat{j} + \frac{4}{\sqrt{29}}\,\hat{k}\right) = \frac{6}{\sqrt{29}}$$

مثال 14: اکائی سمتیہ کی سمت کوسائن معلوم کیجیے جو کہ مستوی $\vec{r}\cdot(6\,\hat{i} - 3\,\hat{j} - 2\,\hat{k}) + 1 = 0$ پر عمود ہے اور جو مبدا سے ہو کر گزر رہی ہے۔

حل: دی ہوئی مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے

$$\vec{r}\cdot(-6\,\hat{i} + 3\,\hat{j} + 2\,\hat{k}) = 1 \quad \text{.............(1)}$$

اب

$$|-6\,\hat{i} + 3\,\hat{j} + 2\,\hat{k}| = \sqrt{36+9+4} = 7$$

اس لیے، (1) کو دونوں طرف 7 سے تقسیم کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\vec{r}\cdot\left(-\frac{6}{7}\hat{i}+\frac{3}{7}\hat{j}+\frac{2}{7}\hat{k}\right)=\frac{1}{7}$$

جو کہ مستوی کی $\vec{r}\cdot\hat{n}=d$ شکل میں مساوات ہے

یہ دکھاتا ہے کہ $\hat{n}=-\frac{6}{7}\hat{i}+\frac{3}{7}\hat{j}+\frac{2}{7}\hat{k}$ ایک اکائی سمتیہ ہے جو کہ مبدا سے مستوی پر عمود ہے۔ اس لیے

$\hat{n}$ کے سمت کوسائن ہیں $\frac{-6}{7},\frac{3}{7},\frac{2}{7}$

مثال 15: مستوی $2x-3y+4z-6=0$ کا مبدا سے فاصلہ معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ نارمل کی مستوی پر سمت نسبتیں $2,-3,4$ ہیں، اس لیے اس کی سمت کوسائن ہیں

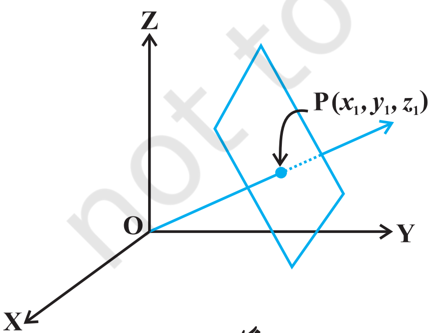
$$\frac{2}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}},\frac{-3}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}},\frac{4}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}\text{ یعنی، }\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{-3}{\sqrt{29}},\frac{4}{\sqrt{29}}$$

اس لیے، مساوات $2x-3y+4z-6=0$ یعنی، $2x-3y+4z=6$ کو دونوں طرف $\sqrt{29}$ سے تقسیم کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا

$$\frac{2}{\sqrt{29}}x+\frac{-3}{\sqrt{29}}y+\frac{4}{\sqrt{29}}z=\frac{6}{\sqrt{29}}$$

یہ $lx+my+nz=d$ کی شکل کا ہے، جہاں d مستوی کا مبدا سے فاصلہ ہے۔ اس لیے، مستوی کا مبدا سے فاصلہ $\frac{6}{\sqrt{29}}$ ہے۔

مثال 16: عمود کے پایہ کے مختص معلوم کیجیے جو کہ مبدا سے مستوی $2x-3y+4z-6=0$ پر کھینچا گیا ہے۔



شکل 11.11

حل: مان لیجیے مبدا سے عمود P کے پایہ کے مختص مستوی پر (x_1, y_1, z_1) ہے (شکل 11.11)

تب x_1, y_1, z_1 خط OP کی سمت نسبتیں ہیں۔

مستوی کی مساوات کو نارمل شکل میں لکھنے پر، ہمارے پاس ہے

$$\frac{2}{\sqrt{29}}x-\frac{3}{\sqrt{29}}y+\frac{4}{\sqrt{29}}z=\frac{6}{\sqrt{29}}$$

جہاں، $\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}$ ، OP کی سمت کوسائن ہے

کیونکہ $d.c'.s$ اور خط کی سمت نسبتیں تناسب میں ہیں، ہمارے پاس ہے

$$\frac{x_1}{\frac{2}{\sqrt{29}}} = \frac{y_1}{\frac{-3}{\sqrt{29}}} = \frac{z_1}{\frac{4}{\sqrt{29}}} = k$$

یعنی،

$$x_1 = \frac{2k}{\sqrt{29}}, y_1 = \frac{-3k}{\sqrt{29}}, z_1 = \frac{4k}{\sqrt{29}}$$

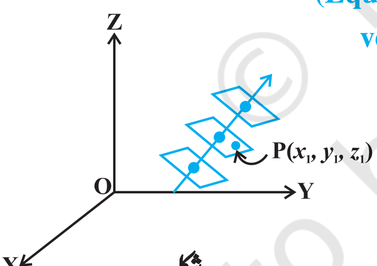
انھیں مستوی کی مساوات میں رکھنے پر، ہمیں $k = \frac{6}{\sqrt{29}}$ حاصل ہوتا ہے

اس لیے عمود کا پایہ $\left(\frac{12}{29}, \frac{-18}{29}, \frac{24}{29}\right)$ ہے

نوٹ اگر مبدا سے فاصلہ d ہے اور l, m, n مستوی پر نارمل کی مبدا کے ذریعہ سمت کوسائن ہیں، تب عمود کا پیر (ld, md, nd) ہے۔

11.6.2 ایک مستوی کی مساوات جو کہ ایک دیے ہوئے سمتی پر عمود ہے اور ایک دیے ہوئے نقطے سے ہو کر گزر رہی ہے۔

(Equation of a plane perpendicular to a given vector and passing through a given point)

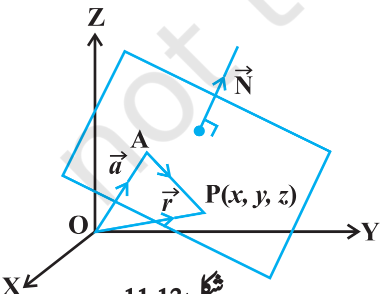


شکل 11.12

فضا میں، بہت سی مستوی ہو سکتی ہیں جو کہ دیے ہوئے سمتیہ پر عمود ہیں، لیکن دیے ہوئے نقطے $P(x_1, y_1, z_1)$ سے اس طرح کی صرف ایک ہی مستوی ممکن ہے (شکل 11.12 دیکھیے)۔

مان لیجیے ایک مستوی نقطہ A سے مقامی سمتیہ $\vec{a}$ کے ساتھ ہو کر گزر رہی ہے اور سمتی $\vec{N}$ پر عمود ہے۔

مان لیجیے مستوی میں کسی بھی نقطہ $P(x, y, z)$ پر مقامی سمتیہ $\vec{r}$ ہے۔ (شکل 11.13)



شکل 11.13

تب نقطہ P مستوی میں واقع ہے اگر اور صرف اگر $\overline{AP}$ ، $\vec{N}$ پر عمود

ہے، یعنی، $\overrightarrow{AP}.\vec{N} = 0$ ۔لیکن $\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}$ اس لیے،

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{N} = 0 \qquad \text{(I)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

یہ مستوی کی سمتیہ مساوات ہے۔

کارتیزی شکل (Cartesian form)

مان لیجیے دیا ہوا نقطہ A، (x_1, y_1, z_1) ہے، P، (x, y, z) ہے اور $\vec{N}$ کی سمت نسبتیں A، B اور C ہیں۔تب،

$$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}\text{، } \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \text{ اور } \vec{N} = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$$

اب، $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{N} = 0$

اس لیے $\left[(x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k}\right] \cdot (A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}) = 0$

یعنی، $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$

مثال 17: مستوی کی سمتیہ اور کارتیزی مساواتیں معلوم کیجیے جو کہ نقطہ $(5,2,-4)$ سے ہو کر گزر رہی ہے اور اس خط پر عمود ہے جس کی سمت نسبتیں $2,3,-1$ ہیں۔

حل: ہمارے پاس نقطہ $(5,2,-4)$ کا مقامی سمتیہ $\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ کی شکل کا ہے اور نارمل سمتیہ $\vec{N}$ جو مستوی پر عمود ہے، $\vec{N} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ کی شکل کا ہے

اس لیے، مستوی کی سمتیہ مساوات $(\vec{r} - \vec{a}).\vec{N} = 0$ سے دی گئی ہے۔ یا

$$[\vec{r} - (5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k})] \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) = 0 \qquad \text{(I)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(1) کو کارتیزی شکل میں بدلنے پر، ہمارے پاس ہے

$$[(x - 5)\hat{i} + (y - 2)\hat{j} + (z + 4)\hat{k}] \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) = 0$$

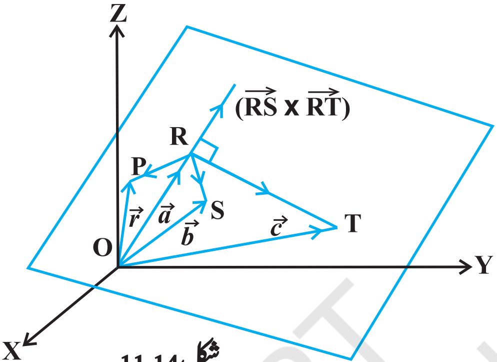
یا $2(x - 5) + 3(y - 2) - 1(z + 4) = 0$

یعنی، $2x + 3y - z = 20$

جو کہ مستوی کی کارتیزی مساوات ہے۔

11.6.3 ایک مستوی کی مساوات جو تین غیر ہم خط نقاط سے گزر رہی ہے
(Equation of a plane passing through three non collinear points)

مان لیجیے مستوی پر تین غیر ہم خط نقاط R، S اور T ہیں جن کے مقامی سمتیہ بالترتیب $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ ہیں (شکل 11.14)۔



شکل 11.14

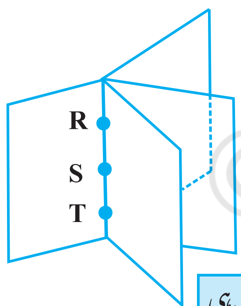
سمتیہ $\overline{RS}$ اور $\overline{RT}$ دی ہوئی مستوی میں ہیں۔ اس لیے، سمتیہ $\overline{RS} \times \overline{RT}$ مستوی پر عمود ہے جس میں نقاط R، S اور T موجود ہیں۔ مان لیجیے مستوی میں کسی بھی نقطہ P کا مقامی سمتیہ $\vec{r}$ ہے۔ اس لیے، مستوی کی مساوات جو کہ R سے ہو کر گزر رہی ہے اور سمتی $\overline{RS} \times \overline{RT}$ پر عمود ہے، یہ ہے

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\overline{RS}\times\overline{RT})=0$$

یا

$$(\vec{r}-\vec{a})\times[(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})]=0 \quad \text{(1)............}$$

یہ سمتیہ شکل میں مستوی کی مساوات ہے جو کہ تین غیر ہم خط نقاط سے ہو کر گزر رہی ہے۔



شکل 11.15

> **نوٹ** یہ کہنا کیوں ضروری تھا کہ تین نقاط غیر ہم خط ہونے ضروری ہیں؟ اگر تین نقاط ایک ہی خط پر ہوتے، تب ایسی بہت سی مستوی ہوں گی جن میں یہ موجود ہوں گے۔ (شکل 11.15)

یہ مستویں ایک کتاب کے اوراق سے ملتی جلتی ہیں جہاں نقاط R، S اور T کو رکھنے والا خط کتاب کی جلد کے افراد ہیں۔

کارتیزی شکل (Cartesian form)

مان لیجیے (x_1, y_1, z_1) ، (x_2, y_2, z_2) اور (x_3, y_3, z_3) بالترتیب نقاط R، S اور T کے مختص ہیں۔ مان لیجیے (x, y, z) مستوی میں کسی بھی نقطہ P کے مقامی سمتیہ $\vec{r}$ کے ساتھ مختص ہیں۔ تب

$$\overrightarrow{RP} = (x-x_1)\hat{i} + (y-y_1)\hat{j} + (z-z_1)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{RS} = (x_2-x_1)\hat{i} + (y_2-y_1)\hat{j} + (z_2-z_1)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{RT} = (x_3-x_1)\hat{i} + (y_3-y_1)\hat{j} + (z_3-z_1)\hat{k}$$

ان قدروں کو سمتیہ شکل کی مساوات (1) میں رکھنے پر اور اسے مقطعہ کی شکل میں ظاہر کرنے پر، ہمارے پاس ہے

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

جو کہ تین غیر ہم خط نقاط (x_1, y_1, z_1)، (x_2, y_2, z_2) اور (x_3, y_3, z_3) سے گزرتی ہوئی کارتیزی شکل میں مستوی کی مساوات ہے۔

مثال 18: مستوی کی سمتیہ مساواتیں معلوم کیجیے جو کہ نقاط $R(2,5,-3)$، $S(-2,-3,5)$ اور $T(5,3,-3)$ سے ہو کر گزر رہی ہیں۔

حل: مان لیجیے $\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$، $\vec{b} = -2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$، $\vec{c} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$

تب مستوی کی سمتیہ مساوات جو کہ $\vec{a}$، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ سے ہو کر گزر رہی ہے، اس طرح دی گئی ہے

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}) = 0 \qquad \text{(کیوں؟)}$$

یا

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot [(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})] = 0$$

یعنی،

$$[\vec{r} - (2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k})] \cdot [(-4\hat{i} - 8\hat{j} + 8\hat{k}) \times (3\hat{i} - 2\hat{j})] = 0$$

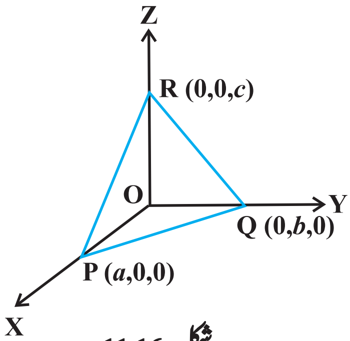
11.6.4 ایک مستوی کی مساوات کی مقطوعہ شکل (Intercept form of the equation of a plane)

اس سیکشن میں ہم ایک مستوی کی مساوات کا مقطوعہ شکل میں استخراج کریں گے جو کہ مستوی سے مختص محور پر بنتی ہے۔ مان لیجیے مستوی کی مساوات ہے

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (D \neq 0) \qquad \text{(1)}\ldots\ldots\ldots$$

مان لیجیے، مستوی x، y اور z محوروں پر بالترتیب a، b اور c مقطوعہ بناتی ہے (شکل 11.16)۔

اس لیے، مستوی x، y اور z محوروں پر بالترتیب $(a,0,0)$، $(0,b,0)$ اور $(0,0,c)$ پر ملتی ہے۔



شکل 11.16

اس لیے، $A = \frac{-D}{a}$ یا $Aa + D = 0$

$B = \frac{-D}{b}$ یا $Bb + D = 0$

$C = \frac{-D}{c}$ یا $Cc + D = 0$

ان قدروں کو مستوی کی مساوات (1) میں رکھنے اور آسان کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (1)\cdots\cdots\cdots$$

جو کہ مستوی کی مقطوعہ شکل میں مطلوبہ مساوات ہے۔

مثال 19: مستوی کی مساوات x، y اور z-محوروں پر بالترتیب مقطوعہ 2، 3 اور 4 کے ساتھ معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے مستوی کی مساوات ہے

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (1)\cdots\cdots\cdots$$

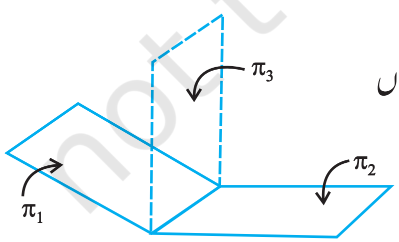
یہاں $a = 2$، $b = 3$، $c = 4$ ہیں

a، b اور c کی قدریں کی مساوات (1) رکھنے پر، ہمیں مستوی کی مطلوبہ مساوات ایسی حاصل ہوتی ہے $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$

یا $6x + 4y + 3z = 12$

11.6.5 دو دی ہوئی مستویں کے تقاطع سے گزرتی ہوئی مستوی

(Plane passing through the intersection of two given planes)



شکل 11.17

مان لیجیے π_1 اور π_2 دو مستوی ہیں جن کی مساوات بالترتیب اور $\vec{r}\cdot\hat{n}_2 = d_2$ ہیں۔ کسی بھی نقطہ کا مقامی سمتیہ تقاطع کے خط پر دونوں مساوات کو مطمئن کرنا چاہیے۔ (شکل 11.17)۔

اگر خط پر ایک نقطہ کا مقامی سمتیہ $\vec{t}$ ہے، تب

$\vec{t}\cdot\hat{n}_1 = d_1$ اور $\vec{t}\cdot\hat{n}_2 = d_2$

اس لیے، λ کی تمام حقیقی قدروں کے لیے، ہمارے پاس ہے

$$\vec{t}\cdot(\hat{n}_1+\lambda\hat{n}_2)=d_1+\lambda d_2$$

کیونکہ $\vec{t}$ اختیاری ہے، یہ خط پر کسی بھی نقطہ کو مطمئن کرتا ہے۔

اس لیے، مساوات $\vec{r}\cdot(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2)=d_1+\lambda d_2$ ایک مستوی π_3 کو ظاہر کرتی ہے، جو کہ اس طرح ہے کہ اگر کوئی بھی سمتی $\vec{r}$ دونوں مساوات π_1 اور π_2 کو مطمئن کرتا ہے، تو یہ مساوات π_3 کو بھی مطمئن کرے گا، یعنی، کوئی بھی مستوی جو کہ مستویوں کے تقاطع سے ہو کر گزر رہی ہے

$$\vec{r}\cdot\vec{n}_1=d_1 \text{ اور } \vec{r}\cdot\vec{n}_2=d_2$$

مساوات $\boldsymbol{\vec{r}\cdot(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2)=d_1+\lambda d_2}$ رکھتی ہے .... (1)

کارتیزی شکل (Cartesian form)

کارتیزی نظام میں، مان لیجیے

$$\vec{n}_1=\mathrm{A}_1\hat{i}+\mathrm{B}_2\hat{j}+\mathrm{C}_1\hat{k}$$

$$\vec{n}_2=\mathrm{A}_2\hat{i}+\mathrm{B}_2\hat{j}+\mathrm{C}_2\hat{k}$$

اور

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

تب مساوات (1) بن جاتی ہے

$$x(\mathrm{A}_1+\lambda\mathrm{A}_2)+y(\mathrm{B}_1+\lambda\mathrm{B}_2)+z(\mathrm{C}_1+\lambda\mathrm{C}_2)=d_1+\lambda d_2$$

یا

$$\mathbf{(A_1x+B_1y+C_1z-d_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z-d_2)=0} \quad \text{(2)............}$$

جو کہ مستوی کی مساوات کی مطلوبہ کارتیزی شکل ہے، جو λ کی ہر ایک قدر کے لیے دی ہوئی مستویں کے تقاطع سے ہو کر گزر رہی ہے۔

مثال 20: مستوی کی سمتیہ مساوات معلوم کیجیے، جو کہ مستویوں $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=6$ اور $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})=-5$ کے تقاطع اور نقطہ (1,1,1) سے ہو کر گزر رہی ہے۔

حل: یہاں $\vec{n}_1=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ اور $\vec{n}_2=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ ہے

اور $d_1=6$ اور $d_2=-5$

اس لیے، رشتے $\vec{r}\cdot(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2)=d_1+\lambda d_2$ کا استعمال کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\vec{r}\cdot[\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})]=6-5\lambda$$

یا
$$\vec{r}\cdot[(1+2\lambda)\hat{i}+(1+3\lambda)\hat{j}+(1+4\lambda)\hat{k}]=6-5\lambda \qquad (1)\cdots\cdots\cdots\cdots$$

جہاں، λ کوئی حقیقی عدد ہے۔

$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ لینے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot[(1+2\lambda)\hat{i}+(1+3\lambda)\hat{j}+(1+4\lambda)\hat{k}]=6-5\lambda$$

یا
$$(1+2\lambda)x+(1+3\lambda)y+(1+4\lambda)z=6-5\lambda$$

یا
$$(x+y+z-6)+\lambda(2x+3y+4z+5)=0 \qquad (2)\cdots\cdots\cdots\cdots$$

دیا ہوا ہے کہ مستوی، نقطہ (1,1,1) سے ہو کر گزرتی ہے، اس لیے یہ (2) کو ہر حالت میں مطمئن کرے گی، یعنی،

$$(1+1+1-6)+\lambda(2+3+4+5)=0$$

یا
$$\lambda=\frac{3}{14}$$

λ کی قدر کی مساوات (1) رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\vec{r}\left[\left(1+\frac{3}{7}\right)\hat{i}+\left(1+\frac{9}{14}\right)\hat{j}+\left(1+\frac{6}{7}\right)\hat{k}\right]=6-\frac{15}{14}$$

یا
$$\vec{r}\left(\frac{10}{7}\hat{i}+\frac{23}{14}\hat{j}+\frac{13}{7}\hat{k}\right)=\frac{69}{14}$$

یا
$$\vec{r}\cdot(20\hat{i}+23\hat{j}+26\hat{k})=69$$

جو کہ مستوی کی مطلوبہ سمتیہ مساوات ہے۔

11.7 دو خطوط کی ہم مستویت (Coplanarity of Two Lines)

مان لیجیے کہ دیے ہوئے خطوط ہیں

$$\vec{r}=\vec{a}_1+\lambda\vec{b}_1 \qquad (1)\cdots\cdots\cdots\cdots$$

اور $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$ ....(2)

مان لیجیے خط (1) نقطہ A سے مقامی سمتیہ $\vec{a}_1$ کے ساتھ ہو کر گزرتا ہے اور $\vec{b}_1$ کے متوازی ہے۔ مان لیجیے خط (2) نقطہ B سے مقامی سمتیہ $\vec{a}_2$ کے ساتھ ہو کر گزرتا ہے اور $\vec{b}_2$ کے متوازی ہے۔

اس طرح $\overrightarrow{AB} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$

دیئے ہوئے خطوط ہم مستوی ہیں اگر اور صرف اگر $\overrightarrow{AB}$ ، $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2$ پر عمود ہے

یعنی، $\overrightarrow{AB}.(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$ یا $(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$

کارتیزی شکل (Cartesian form)

مان لیجیے (x_1, y_1, z_1) اور (x_2, y_2, z_2) بالترتیب نقاط A اور B کے مختص ہیں۔

مان لیجیے a_1, b_1, c_1 اور a_2, b_2, c_2 بالترتیب $\vec{b}_1$ اور $\vec{b}_2$ کی سمت نسبتیں ہیں۔ تب

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\vec{b}_1 = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k} \quad \text{اور} \quad \vec{b}_2 = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$$

دیے ہوئے خطوط ہم مستوی ہیں اگر اور صرف اگر $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right) = 0$ ہے۔ کارتیزی شکل میں اسے اس طرح دکھایا (سمجھایا) جاسکتا ہے

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{............(4)}$$

مثال 21: دکھائیے کہ خطوط

$$\frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{5} \quad \text{اور} \quad \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{5}$$ متناظر ہیں

حل: یہاں، $x_1 = -3,\ y_1 = 1,\ z_1 = 5,\ a_1 = -3,\ b_1 = 1,\ c_1 = 5$

$$x_2 = -1,\ y_2 = 2,\ z_2 = 5,\ a_2 = -1,\ b_2 = 2,\ c_2 = 5$$

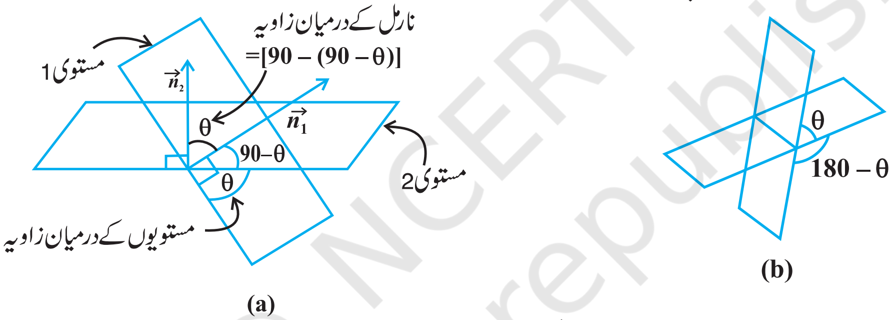
اب، مقطعہ پر غور کیجیے

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

اس لیے، خطوط ہم مستوی ہیں۔

11.8 دو مستویوں کے درمیان زاویہ (Angle between two planes)

تعریف 2: دو مستویوں کے درمیان زاویہ ان کے نارمل کے درمیان زاویہ کے طور پر بیان کیا گیا ہے (شکل (a)11.18)۔ یہ مشاہدہ کیجیے کہ اگر دو مستویوں کے درمیان θ ایک زاویہ ہے، تب $180 - \theta$ بھی ہے شکل ((11.8(b))۔ ہم دونوں مستویوں کے درمیان زاویہ، زاویہ حادہ کے طور پر لیں گے۔



شکل 11.18

اگر مستویں پر $\vec{n}_1$ اور $\vec{n}_2$ نارمل ہیں اور مستویں کے درمیان زاویہ θ ہے

$$\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1 \quad \text{اور} \quad \vec{r}\ .\ \vec{n}_2 = d_2$$

تب کچھ مشترک نقطوں سے مستویں پر کھینچے گئے نارمل کے درمیان θ ایک زاویہ ہے

ہمارے پاس ہے،
$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}\right|$$

> **نوٹ** مستویوں ایک دوسرے پر عمود ہیں اگر $\vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0$ اور متوازی ہیں اگر $\vec{n}_1$، $\vec{n}_2$ کے متوازی ہے۔

کارتیزی شکل (Cartesian form) مان لیجیے مستویں کے درمیان زاویہ θ ہے

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{اور}$$

مستویوں پر نارمل کی سمت نسبتیں بالترتیب A_1 ، B_1 ، C_1 اور A_2 ، B_2 ، C_2 ہیں۔

اس لیے،
$$\cos\theta = \left|\frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\right|$$

نوٹ

1۔ اگر مستویاں ایک دوسرے کے ساتھ قائم زاویہ بناتی ہیں، تب $\theta = 90^\circ$ اور اسی طرح $\cos\theta = 0$ اس لیے، $\cos\theta = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

2۔ اگر مستوی متوازی ہیں، تب $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

مثال 22: دو مستویوں $2x + y - 2z = 5$ اور $3x - 6y - 2z = 7$ کے درمیان سمتیہ طریقہ کا استعمال کر کے زاویہ معلوم کیجیے۔

حل: دو مستویوں کے درمیان زاویہ ان کے نارمل کے درمیان زاویہ ہے۔ مستوی کی مساوات سے، نارمل سمتیہ یہ ہیں

$$\vec{N}_1 = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} \quad \text{اور} \quad \vec{N}_2 = 3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

اس لیے،
$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1|\,|\vec{N}_2|}\right| = \left|\frac{(2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})\cdot(3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k})}{\sqrt{4+1+4}\ \sqrt{9+36+4}}\right| = \left(\frac{4}{21}\right)$$

اس لیے،
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)$$

مثال 23: دو مستویوں $3x - 6y + 2z = 7$ اور $2x + 2y - 2z = 5$ کے درمیان زاویہ معلوم کیجیے۔

حل: مستویوں کی دی ہوئی مساوات کا ان مساوات سے موازنہ کرنے پر

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{اور} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

ہمیں حاصل ہوتا ہے
$$A_1 = 3,\ B_1 = -6,\ C_1 = 2$$
$$A_2 = 2,\ B_2 = 2,\ C_2 = -2$$

$$\cos\theta = \left|\frac{3\times 2 + (-6)\,(2) + (2)\,(-2)}{\sqrt{\left(3^2 + (-6)^2 + (-2)^2\right)}\ \sqrt{\left(2^2 + 2^2 + (-2)^2\right)}}\right|$$

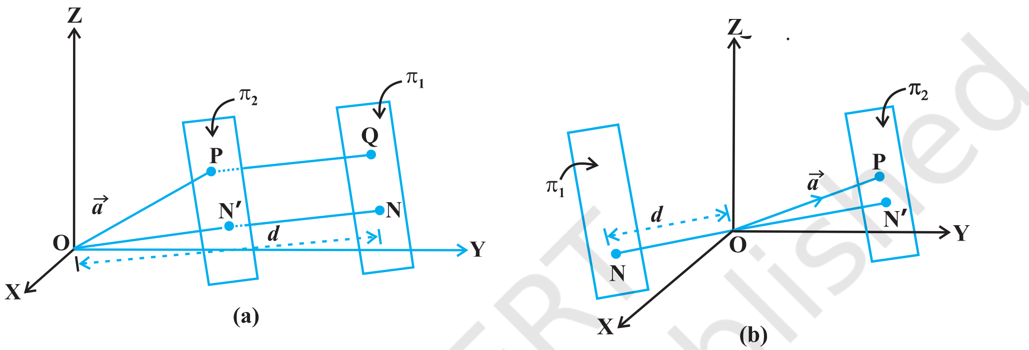
$$= \left|\frac{-10}{7\times 2\sqrt{3}}\right| = \frac{5}{7\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{21}$$

اس لیے،
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{21}\right)$$

11.9 ایک نقطہ کا ایک مستوی سے فاصلہ (Distance of a point from a plane)

سمتیہ شکل (Vector form)

ایک مستوی π_1 پر غور کیجیے جس میں ایک نقطہ P مقامی سمتیہ $\vec{a}$ کے ساتھ ہے اور جس کی مساوات $\vec{r}\cdot\hat{n}=d$ ہے شکل (11.19)۔



شکل 11.19

ایک نقطہ P سے گزرتی ہوئی ایک مستوی π_2 پر غور کیجیے جو کہ مستوی π_1 کے متوازی ہے۔ π_2 کا اکائی نارمل سمتیہ $\hat{n}$ ہے۔ یہاں، اس کی مساوات $(\vec{r}-\vec{a})\cdot\hat{n}=0$ ہے۔

یعنی، $\vec{r}\cdot\hat{n}=\vec{a}\cdot\hat{n}$

اس طرح، اس مستوی کا مبدا سے ON' فاصلہ $|\vec{a}\cdot\hat{n}|$ ہے۔ اس لیے، مستوی π_1 سے PQ فاصلہ یہ ہے (شکل 11.21(a))

یعنی، $ON-ON'=|d-\vec{a}\cdot\hat{n}|$

جو کہ دی ہوئی مستوی پر ایک نقطہ سے عمود کی لمبائی ہے۔ ہم اسی طرح کے نتیجے ((11.19(b)) کے لیے بھی قائم کر سکتے ہیں۔

نوٹ

1۔ اگر مستوی π_2 کی مساوات $\vec{r}\cdot\vec{N}=d$ کی شکل میں ہے، جہاں $\vec{N}$ مستوی پر نارمل ہے، تب عمودی فاصلہ ہے $\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{N}-d|}{|\vec{N}|}$۔

2۔ مبدا سے عمود کی لمبائی مستوی $\vec{r}\cdot\vec{N}=d$ پر $\dfrac{|d|}{|\vec{N}|}$ ہے۔ (کیونکہ $\vec{a}=0$)

کارتیزی شکل (Cartesian form)

مان لیجیے مقامی سمتیہ $\vec{a}$ کے ساتھ $P(x_1, y_1, z_1)$ دیا ہوا نقطہ ہے اور

$$Ax + By + Cz = D$$

دی ہوئی سمتیہ کی کارتیزی مساوات ہے۔ تب

$$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

$$\vec{N} = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$$

اس لیے، نوٹ 1 کے حوالے سے، P سے مستوی پر عمود ہے

$$\left|\frac{(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})\cdot(A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}) - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

مثال 24: ایک نقطہ $(2, 5, -3)$ کا مستوی $\vec{r}\cdot(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 4$ سے فاصلہ معلوم کیجیے۔

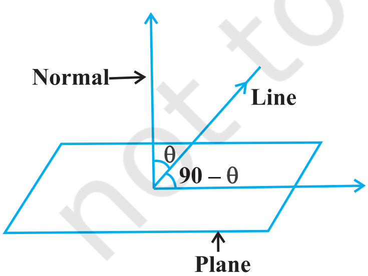
حل: یہاں $\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$، $\vec{N} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ اور $d = 4$ ہے

اس لیے، نقطہ $(2, 5, -3)$ کا دی ہوئی مستوی سے فاصلہ ہے

$$\frac{|(2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k})\cdot(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) - 4|}{|6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}|} = \frac{|12 - 15 - 6 - 4|}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{13}{7}$$

11.10 ایک خط اور ایک مستوی کے درمیان زاویہ

(Angle between a line and a plane)



شکل 11.20

تعریف 3: ایک خط اور ایک مستوی کے درمیان زاویہ مستوی کے نارمل اور خط کے درمیان زاویہ کا تکملہ ہے۔ (شکل 11.20)

سمتیہ شکل (Vectorform) اگر ایک خط کی مساوات $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ ہے

اور مستوی کی مساوات $\vec{r}\cdot\vec{n} = d$ ہے۔ تب خط اور مستوی کے نارمل کے درمیان زاویہ ہے

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{n}|}\right|$$

اس لیے مستوی اور خط کے درمیان زاویہ ϕ ، $90-\theta$ سے دیا گیا ہے، یعنی.

$$\sin(90-\theta) = \cos\theta$$

یعنی،
$$\sin\phi = \left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}|\ |\vec{n}|}\right| \quad \text{یا} \quad \phi = \sin^{-1}\left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right|$$

مثال 25: خط $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{6}$ اور مستوی $10x+2y-11z=3$ کے درمیان زاویہ معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے مستوی کے نارمل اور خط کے درمیان زاویہ θ ہے۔ دی ہوئی مساوات کو سمتیہ شکل میں بدلنے پر، ہمارے پاس ہے

$$\vec{r} = (-\hat{i}+3\hat{k}) + \lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$$

اور
$$\vec{r}\cdot(10\hat{i}+2\hat{j}-11\hat{k}) = 3$$

یہاں
$$\vec{b} = 2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k} \quad \text{اور} \quad \vec{n} = 10\hat{i}+2\hat{j}-11\hat{k}$$

$$\sin\phi = \left|\frac{(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})\cdot(10\hat{i}+2\hat{j}-11\hat{k})}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}\ \sqrt{10^2+2^2+11^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{-40}{7\times 15}\right| = \left|\frac{-8}{21}\right| = \frac{8}{21} \quad \text{یا} \quad \phi = \sin^{-1}\left(\frac{8}{21}\right)$$

مشق 11.3

1۔ مندرجہ ذیل ہر ایک کیس میں، نارمل کا مستوی پر سمت کوسائن اور مبدا سے فاصلہ معلوم کیجیے

(a) $z = 2$ (b) $x+y+z=1$

(c) $2x+3y-z=5$ (d) $5y+8=0$

2۔ ایک مستوی کی سمتی مساوات معلوم کیجیے جو کہ مبدا سے 7 اکائی کے فاصلہ پر ہے اور سمتی $3\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k}$ پر نارمل ہے

3۔ مندرجہ ذیل مستویوں کی کارتیزی مساوات معلوم کیجیے:

(a) $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})=2$ (b) $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k})=1$

(c) $\vec{r}\cdot[(s-2t)\,\hat{i}+(3-t)\,\hat{j}+(2s+t)\,\hat{k}]=15$

4۔ مندرجہ ذیل کیسوں میں، مبدا سے کھینچے گئے عمود کے پایہ کے مختص معلوم کیجیے

(a) $2x+3y+4z-12=0$ (b) $3y+4z-6=0$

(c) $x+y+z=1$ (d) $5y+8=0$

5۔ مستویوں کی سمتیہ اور کارتیزی مساوات معلوم کیجیے

(a) جو کہ نقطہ $(1, 0, -2)$ سے ہوکر گزر رہی ہے اور مستوی $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$. پر نارمل ہے۔

(b) جو کہ نقطہ $(1,4, 6)$ سے ہوکر گزر رہی ہے اور مستوی پر $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$. نارمل سمتیہ ہے۔

6۔ مستویوں کی مساوات معلوم کیجیے جو کہ تین نقاط سے ہوکر گزر رہی ہیں۔

(a) $(1, 1, -1)$, $(6, 4, -5)$, $(-4, -2, 3)$

(b) $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(-2, 2, -1)$

7۔ مستوی $2x+y-z=5$ سے کاٹے گئے مقطوعہ کو معلوم کیجیے۔

8۔ اس مستوی کی مساوات معلوم کیجیے جس کا y-محور پر مقطوعہ 3 ہے اور ZOX مستوی کے متوازی ہے۔

9۔ اس مستوی کی مساوات معلوم کیجیے جو کہ نقطہ $(2, 2, 1)$ اور مستویوں $3x-y+2z-4=0$ اور $x+y+z-2=0$ کے تقاطع سے ہوکر گزرتی ہے۔

10۔ اس مستوی کی سمتی مساوات معلوم کیجیے جو کہ نقطہ $(2, 1, 3)$ اور مستویوں $\vec{r}.(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})=7$، $\vec{r}.(2\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k})=9$ کے تقاطع سے ہوکر گزرتی ہے۔

11۔ اس مستوی کی مساوات معلوم کیجیے جو کہ مستویوں $x+y+z=1$ اور $2x+3y+4z=5$ کے تقاطع کے خط سے ہوکر گزرتی اور مستوی $x-y+z=0$ پر عمود ہے۔

12۔ مستویوں کے درمیان زاویہ معلوم کیجیے جن کی سمتیہ مساواتیں

$\vec{r}\cdot(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})=5$ اور $\vec{r}\cdot(3\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k})=3$ ہیں۔

13۔ مندرجہ ذیل کیسوں میں معلوم کیجیے کہ کیا دی ہوئی مستویوں متوازی ہیں یا عمودی، اگر کسی کیس میں ان میں سے کوئی بھی نہیں ہیں، تو متوازی ہیں اور نہ ہی عمودی، ہیں، تو ان کے درمیان زاویہ معلوم کیجیے۔

(a) $7x+5y+6z+30=0$ اور $3x-y-10z+4=0$

(b) $2x+y+3z-2=0$ اور $x-2y+5=0$

(c) $2x-2y+4z+5=0$ اور $3x-3y+6z-1=0$

(d) $2x-y+3z-1=0$ اور $2x-y+3z+3=0$

(e) $4x+8y+z-8=0$ اور $y+z-4=0$

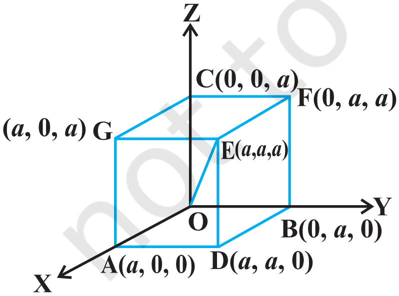
14۔ مندرجہ ذیل کیسوں میں، دیے ہوئے ہر ایک نقاط کا فاصلہ دی ہوئی مستوی کے مطابق معلوم کیجیے۔

	نقطہ	مستوی
(a)	(0, 0, 0)	$3x-4y+12z=3$
(b)	(3, – 2, 1)	$2x-y+2z+3=0$
(c)	(2, 3, – 5)	$x+2y-2z=9$
(d)	(– 6, 0, 0)	$2x-3y+6z-2=0$

متفرق مثالیں

مثال 26: ایک خط ایک کعب کے وتروں کے ساتھ α، β، γ اور δ زاویے بناتا ہے، تو ثابت کیجیے کہ

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta=\frac{4}{3}$$



شکل 11.21

حل: کعب ایک مستطیل متوازی (rectangular Parallelopiped) اس طرح ہے، جس کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی برابر ہے۔

مان لیجیے OADBFEGC ایک کعب ہے جس کے ہر ضلع کی لمبائی a اکائی ہے (شکل 11.12)

چار وتر OE، AF، BG اور CD ہیں۔

وتر OE کے سمت کوسائن جو کہ دو نقاط O اور E کے ملانے سے بننے والا خط ہے، یہ ہیں

$$\frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}},\frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}},\frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}$$

یعنی، $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{3}}$

اسی طرح، AF، BG اور CD کے سمت کوسائن بالترتیب $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{3}}$ اور $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ ہیں۔

مان لیجیے دیئے ہوئے خط کے سمت کوسائن l، m، n ہیں، جو کہ OE، AF، BG اور CD کے ساتھ بالترتیب α ، β ، γ اور δ زاویے بناتے ہیں۔ تب

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}(l+m+n);\ \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}(-l+m+n)$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}(l-m+n);\ \cos\delta = \frac{1}{\sqrt{3}}(l+m-n) \quad \text{(کیوں؟)}$$

مربع اور جمع کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta$$

$$=\frac{1}{3}\left[(l+m+n)^2+(-l+m+n)^2+(l-m+n)^2+(l+m-n)^2\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[4(l^2+m^2+n^2)\right] = \frac{4}{3} \quad (\text{کیونکہ } l^2+m^2+n^2=1)$$

مثال 27: اس مستوی کی مساوات معلوم کیجیے جس میں نقطہ (1,–1,2) شامل ہے اور ہر ایک مستوی $2x+3y-2z=5$ اور $x+2y-3z=8$ پر عمود ہے۔

حل: مستوی کی مساوات جس میں دیا ہوا نقطہ ہے، یہ ہے

$$A(x-1)+B(y+1)+C(z-2)=0 \quad \text{............(1)}$$

(1) میں دی ہوئی مستوی پر عمودی شرط کو ان مستویوں کے ساتھ نافذ کرنے پر

$2x+3y-2z=5$ اور $x+2y-3z=8$ ، ہمارے پاس ہے

$$2A+3B-2C=0 \text{ اور } A+2B-3C=0$$

ان مساوات کو حل کرنے پر ہمیں $A = -5C$ اور $B = 4C$ حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے، مطلوبہ مساوات ہے

$$-5C(x-1) + 4C(y+1) + C(z-2) = 0$$

یعنی، $$5x - 4y - z = 7$$

مثال 28: نقطہ $P(6, 5, 9)$ اور نقاط $A(3, -1, 2)$، $B(5, 2, 4)$ اور $C(-1, -1, 6)$ سے بننے والی مستوی کے درمیان فاصلہ معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے مستوی میں A، B، C تین نقاط ہیں۔ مستوی پر نقطہ P سے کھینچے گئے عمود کا پیر D ہے۔ PD مطلوبہ فاصلہ ہے جو کہ معلوم کرنا ہے، اور جو کہ $\overrightarrow{AP}$ کا $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ پر ابھرا ہوا حصہ ہے۔

اس لیے، $PD = \overrightarrow{AP}$ کا اکائی سمتیہ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ کے ساتھ نقطہ ضرب۔

اس لیے، $$\overrightarrow{AP} = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}$$

اور $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12\hat{i} - 16\hat{j} + 12\hat{k}$$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ کے ساتھ اکائی سمتیہ $= \dfrac{3\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{34}}$

اس لیے $$PD = (3\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}) \cdot \frac{3\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{34}}$$

$$= \frac{3\sqrt{34}}{17}$$

متبادل کے طور پر، مستوی کی مساوات معلوم کیجیے جو کہ A، B اور C سے ہو کر گزر رہی ہے اور پھر مستوی سے نقطہ P کے فاصلہ کی تحسیب کیجیے۔

مثال 29: دکھایئے کہ خطوط

$$\frac{x - a + d}{\alpha - \delta} = \frac{y - a}{\alpha} = \frac{z - a - d}{\alpha + \delta}$$

اور $$\frac{x - b + c}{\beta - \gamma} = \frac{y - b}{\beta} = \frac{z - b - c}{\beta + \gamma}$$ ہم مستوی ہیں۔

حل: یہاں

$$x_1 = a - d \qquad x_2 = b - c$$
$$y_1 = a \qquad y_2 = b$$
$$z_1 = a + d \qquad z_2 = b + c$$
$$a_1 = \alpha - \delta \qquad a_2 = \beta - \gamma$$
$$b_1 = \alpha \qquad b_2 = \beta$$
$$c_1 = \alpha + \delta \qquad c_2 = \beta + \gamma$$

اب مقطعہ پر غور کیجیے

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b - c - a + d & b - a & b + c - a - d \\ \alpha - \delta & \alpha & \alpha + \delta \\ \beta - \gamma & \beta & \beta + \gamma \end{vmatrix}$$

تیسرے کالم کو پہلے کالم میں جمع کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2\begin{vmatrix} b - a & b - a & b + c - a - d \\ \alpha & \alpha & \alpha + \delta \\ \beta & \beta & \beta + \gamma \end{vmatrix} = 0$$

کیونکہ پہلے اور دوسرے کالم متماثل ہیں۔ اس لیے، دیے ہوئے دونوں خطوط ہم مستوی ہیں۔

مثال 30: اس نقطہ کے مختص معلوم کیجیے جہاں خطوط نقاط A (3, 4, 1) اور B(5, 1, 6) سے گزر کر xy–مستوی کو کراس کرتے ہیں۔

حل: نقاط A اور B سے گزرنے والے خط کی سمتیہ مساوات ہے

$$\vec{r} = 3\,\hat{i} + 4\,\hat{j} + \hat{k} + \lambda\,[\,(5-3)\hat{i} + (1-4)\,\hat{j} + (6-1)\,\hat{k}\,]$$

یعنی،
$$\vec{r} = 3\,\hat{i} + 4\,\hat{j} + \hat{k} + \lambda\,(\,2\,\hat{i} - 3\,\hat{j} + 5\,\hat{k}\,) \qquad \text{(1)} \;.......$$

مان لیجیے P وہ نقطہ ہے جہاں خط AB، مستوی xy–کو کراس کرتا ہے۔ تب نقطہ P کا مقامی سمتیہ $x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$ کی شکل کا ہے۔
اس نقطہ کو مساوات (1) کو ہر حال میں مطمئن کرنا چاہیے۔ (کیوں؟)

یعنی، $x\hat{i} + y\hat{j} = (3+2\lambda)\hat{i} + (4-3\lambda)\hat{j} + (1+5\lambda)\hat{k}$

$\hat{i}$، $\hat{j}$ اور $\hat{k}$ کے یکساں ضریب کی برابری کرنے پر، ہمارے پاس ہے

$$x = 3 + 2\lambda$$

$$y = 4 - 3\lambda$$

$$0 = 1 + 5\lambda$$

مندرجہ بالا مساوات کو حل کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = \frac{13}{5} \text{ اور } y = \frac{23}{5}$$

اس لیے، مطلوبہ نقطہ کے $\left(\frac{13}{5}, \frac{23}{5}, 0\right)$ مختص یہ ہیں۔

باب 11 پر مبنی متفرق مشق

1۔ دکھایئے کہ مبدا کو نقطہ $(2, 1, 1)$ سے ملانے والا خط نقاط $(3, 5, -1)$، $(4, 3, -1)$ سے حاصل کیے گئے خط پر عمود ہے۔

2۔ اگر l_1، m_1، n_1 اور l_2، m_2، n_2 دو باہمی عمودی خطوط کے سمت کوسائن ہیں، تو دکھایئے کہ ان دونوں پر عمودی خط کے سمت کوسائن $m_1 n_2 - m_2 n_1$، $n_1 l_2 - n_2 l_1$، $l_1 m_2 - l_2 m_1$ ہیں۔

3۔ ان خطوط کے درمیان کا زاویہ معلوم کیجیے جن کی سمت نسبتیں a، b، c اور $b - c$، $c - a$، $a - b$ ہیں۔

4۔ ایک خط کی مساوات معلوم کیجیے جو x-محور کے متوازی ہے اور مبدا سے ہو کر گزر رہا ہے۔

5۔ اگر نقاط A، B، C، D کے مختص بالترتیب $(1, 2, 3)$، $(4, 5, 7)$، $(-4, 3, -6)$ اور $(2, 9, 2)$ ہیں، تب خطوط AB اور CD کے درمیان زاویہ معلوم کیجیے۔

6۔ اگر خطوط $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$ اور $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-5}$ ایک دوسرے پر عمود ہیں، تو K کی قدر معلوم کیجیے۔

7۔ اس خط کی سمتیہ مساوات معلوم کیجیے جو کہ $(1, 2, 3)$ سے ہو کر گزر رہا ہے اور مستوی $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}) + 9 = 0$ پر عمود ہے۔

8۔ اس مستوی کی مساوات معلوم کیجیے جو کہ (a, b, c) سے ہو کر گزر رہی ہے اور مستوی $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 2$ کے متوازی ہے۔

9۔ خطوط $\vec{r} = 6\,\hat{i} + 2\,\hat{j} + 2\,\hat{k} + \lambda\,(\hat{i} - 2\,\hat{j} + 2\,\hat{k})$ اور $\vec{r} = -4\,\hat{i} - \hat{k} + \mu(3\,\hat{i} - 2\,\hat{j} - 2\,\hat{k})$ کے درمیان کم از کم فاصلہ معلوم کیجیے۔

10۔ اس نقطہ کے مختصات معلوم کیجیے جہاں (5,1, 6) اور (3, 4,1) سے گزرنے والا خط yz– مستوی کو کراس کرتا ہے۔

11۔ اس نقطہ کے مختصات معلوم کیجیے جہاں (5,1,6) اور (3, 4, 1) سے گزرنے والا خط z x– مستوی کو کراس کرتا ہے۔

12۔ اس نقطہ کے مختصات معلوم کیجیے جہاں (3,– 4,–5) اور (2,–3,1) سے گزرنے والا خط مستوی $2x + y + z = 7$ کو کراس کرتا ہے۔

13۔ اس مستوی کی مساوات معلوم کیجیے جو نقطہ (– 1, 3, 2) سے ہو کر گزر رہی ہے اور ہر ایک مستوی اور $3x + 3y + z = 0$ پر عمود ہے۔

14۔ اگر نقاط $(1, 1, p)$ اور (– 3, 0, 1) مستوی $\vec{r}\cdot(3\,\hat{i} + 4\,\hat{j} - 12\,\hat{k}) + 13 = 0,$ سے برابر کے فاصلے پر ہیں، تب p کی قدر معلوم کیجیے۔

15۔ اس مستوی کی مساوات معلوم کیجیے جو کہ مستویوں $\vec{r}\cdot(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 1$ اور کے تقاطع خط سے ہو کر گزر رہی ہے اور x–محور کے متوازی ہے۔

16۔ اگر O مبدا ہے اور نقطہ P کے مختصات (1, 2, – 3) ہیں، تب مستوی کی مساوات معلوم کیجیے جو کہ نقطہ P سے ہو کر گزر رہی ہے اور OP پر عمود ہے۔

17۔ اس مستوی کی مساوات معلوم کیجیے جس میں مستوی $\vec{r}\cdot(\hat{i} + 2\,\hat{j} + 3\,\hat{k}) - 4 = 0$، $\vec{r}\cdot(2\,\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + 5 = 0$ کا تقاطع خط موجود ہے اور جو کہ مستوی $\vec{r}\cdot(5\,\hat{i} + 3\,\hat{j} - 6\,\hat{k}) + 8 = 0$ پر عمود ہے۔

18۔ نقطہ (–1,–5,–10) کا فاصلہ خط $\vec{r} = 2\,\hat{i} - \hat{j} + 2\,\hat{k} + \lambda\,(3\,\hat{i} + 4\,\hat{j} + 2\,\hat{k})$ اور مستوی $\vec{r}\cdot(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$ کے تقاطع نقطہ سے معلوم کیجیے۔

19۔ اس خط کی سمتی مساوات معلوم کیجیے جو کہ (1, 2, 3) سے ہو کر گزر رہا ہے اور مستویوں $\vec{r}\cdot(\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 5$ اور $\vec{r}\cdot(3\,\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ کے متوازی ہے۔

20۔ اس خط کی سمتیہ کی مساوات معلوم کیجیے جو کہ نقطہ (1, 2,– 4) سے ہو کر گزر رہا ہے اور نیچے دیے گئے دو خطوط:

$$\frac{x-8}{3}=\frac{y+19}{-16}=\frac{z-10}{7}$$ اور $$\frac{x-15}{3}=\frac{y-29}{8}=\frac{z-5}{-5}$$ پر عمود ہے

21۔ ثابت کیجیے کہ اگر a، b، c مستوی کے مقطوعہ ہیں اور یہ مبدا سے p اکائی کے فاصلہ پر ہے، تب

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$$

سوال 22 اور 23 میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے۔

22۔ دو مستویوں $2x+3y+4z=4$ اور $4x+6y+8z=12$ کے درمیان فاصلہ ہے:

(A) 2 اکائیاں (B) 4 اکائیاں (C) 8 اکائیاں (D) $\frac{2}{\sqrt{29}}$ اکائیاں

23۔ مستوئیں: $2x-y+4z=5$ اور $5x-2.5y+10z=6$

(A) عمود (B) متوازی

(C) y-محور کو کاٹتی ہیں (D) $\left(0, 0, \frac{5}{4}\right)$ سے ہو کر گزرتی ہیں

خلاصہ

- ایک خط کی سمت کوسائن اس کے زاویوں کی کوسائن ہیں جو کہ خط مختص محور کی مثبت سمت میں بناتا ہے۔
- اگر l, m, n ایک خط کی سمت کوسائن ہیں، تب $l^2+m^2+n^2=1$ ہے۔
- ایک خط جو کہ دو نقاط $P(x_1, y_1, z_1)$ اور $Q(x_2, y_2, z_2)$ کو ملا رہا ہے، اس کی سمت کوسائن ہیں

$$\frac{x_2-x_1}{PQ}, \frac{y_2-y_1}{PQ}, \frac{z_2-z_1}{PQ}$$

جہاں $PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

- ایک خط کی سمتی نسبتیں وہ اعداد ہیں جو کہ ایک خط کے سمتی کوسائن کے متناسب ہیں۔
- اگر l, m, n ایک خط کی سمتی کو سائن ہیں اور a, b, c سمتی نسبتیں ہیں،

تب $$l=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; m=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; n=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

- عوجی خطوط فضا میں وہ خطوط ہیں جو کہ نہ تو متوازی ہیں اور نہ ہی تقاطع ہیں۔ یہ مختلف مستویوں میں واقع ہوتے ہیں۔

- عوجی خطوط کے درمیان زاویہ وہ زاویہ کہ جو کسی بھی نقطہ (زیادہ بہتر ہے مبدا سے گزرنے والا) سے کھینچے گئے دو تقاطع خطوط کے بیچ میں ہو اور ہر ایک عوجی خطوط کے متوازی ہو۔
- اگر l_1, m_1, n_1 اور l_2, m_2, n_2 دو خطوط کے سمت کوسائن ہیں، اور θ دونوں خطوط کے درمیان زاویہ حادّہ ہے، تب

$$\cos\theta = | l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 |$$

- اگر a_1, b_1, c_1 اور a_2, b_2, c_2 اگر دو خطوط کی سمت نسبتیں ہیں؛ اور دو خطوط کے درمیان θ زاویہ حادّہ ہے، تب

$$\cos\theta = \left| \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \right|$$

- ایک خط کی سمتیہ مساوات جو کہ دیے ہوئے نقطہ سے ہو کر گزر رہا ہے اور جس کا مقامی سمتیہ $\vec{a}$ ہے، اور دیے ہوئے سمتیہ $\vec{b}$ کے متوازی ہے، $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ ہے۔
- ایک نقطہ (x_1, y_1, z_1) سے گزرتے ہوئے ایک خط کی مساوات اور جس کے سمت کوسائن l, m, n ہیں

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$ ہے

- ایک خط کی سمتیہ مساوات جو کہ دو نقاط سے ہو کر گزرتا ہے اور جس کے مقامی سمتیہ $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہیں یہ ہیں

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda (\vec{b} - \vec{a})$$ ہے

- ایک خط کی کارتیزی مساوات جو کہ دو نقاط (x_1, y_1, z_1) اور (x_2, y_2, z_2) سے ہو کر گزرتا ہے

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$ ہے

- اگر $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ اور $\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda \vec{b}_2$ کے درمیان θ ایک زاویہ حادہ ہے، تب

$$\cos\theta = \left| \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1| \, |\vec{b}_2|} \right|$$

- اگر $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ اور $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ دو خطوط کی مساوات ہیں، تب ان دونوں خطوط کے درمیان زاویہ حادّہ اس سے دیا گیا ہے

$$\cos\theta = | l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 |$$

- دو عوجی خطوط کے درمیان کم از کم فاصلہ ایک قطع خط ہے جو کہ دونوں خطوط پر عمود ہے۔

- $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ اور $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$ کے درمیان کم از کم فاصلہ ہے

$$\left| \frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \right|$$

- دونوں خطوط $\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$ اور $\frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$ کے درمیان کم از کم فاصلہ ہے

$$\frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}}$$

- متوازی خطوط $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}$ اور $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}$ کے درمیان فاصلہ یہ ہے

$$\left| \frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|} \right|$$

- سمتیہ شکل میں، ایک مستوی کی مساوات جو کہ مبدا سے d فاصلہ پر ہے، اور $\hat{n}$ مبدا کے ذریعہ مستوی پر اکائی سمتیہ نارمل ہے، یہ ہے $\vec{r} \cdot \hat{n} = d$

- ایک مستوی کی مساوات جو کہ مبدا سے d فاصلہ پر ہے اور مستوی پر نارمل کی سمت کوسائن l, m, n ہیں یہ ہے
$lx + my + nz = d$

- ایک نقطہ سے گزرتے ہوئے ایک مستوی کی مساوات جس کا مقامی سمتیہ $\vec{a}$ ہے اور سمتیہ $\vec{N}$ پر عمود ہے، یہ ہے
$(\vec{r} - \vec{a}) . \vec{N} = 0$ ہے۔

- ایک مستوی کی مساوات جو کہ ایک دیے ہوئے خط پر عمود ہے اور جس کی سمت نسبتیں A، B، C ہیں اور ایک دیے ہوئے نقطے (x_1, y_1, z_1) سے ہو کر گزر رہی ہے یہ ہے
$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

- ایک مستوی کی مساوات جو کہ تین غیر ہم خط نقاط (x_1, y_1, z_1)، (x_2, y_2, z_2) اور (x_3, y_3, z_3) سے ہو کر گزر رہی ہے یہ ہے

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- ایک مستوی کی سمتیہ مساوات جس میں تین غیر ہم خط نقاط شامل ہیں اور جن کے مقامی سمتیہ $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ اور $\vec{c}$ ہیں یہ ہے $(\vec{r}-\vec{a}) \cdot [(\vec{b}-\vec{a}) \times (\vec{c}-\vec{a})] = 0$
- ایک مستوی کی مساوات جو کہ مختص محوروں کو (a, 0, 0)، (0, b, 0) اور (0, 0, c) پر کاٹتی ہے۔ یہ ہے

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

ایک مستوی کی سمتیہ مساوات جو کہ سمتویوں $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1$ اور $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = d_2$ کے تقاطع سے ہو کر گزرتی ہے $\vec{r}\cdot(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2) = d_1+\lambda d_2$ ہے، جہاں λ کوئی بھی غیر صفر مستقل ہے۔

- ایک مستوی کی سمتیہ مساوات جو کہ دو دیئے ہوئی مستویوں $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ اور $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ کے تقاطع سے ہو کر گزر رہی ہے، یہ ہے

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

- دو مستوئیں $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ اور $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}_2$ ہم مستوی ہیں اگر $(\vec{a}_2-\vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1\times\vec{b}_2)=0$
- دو مستوئیں $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ اور $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ ہم مستوی ہیں اگر

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

- سمتی شکل میں، اگر دو مستویوں $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1$ اور $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = d_2$ کے درمیان θ ایک زاویہ ہے، تب

$$\theta = \cos^{-1}\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

- زاویہ ϕ خط $\vec{r} = \vec{a}+\lambda\vec{b}$ اور مستوی $\vec{r}\cdot\hat{n} = d$ کے درمیان ہے $\sin\phi = \left|\frac{\vec{b}\cdot\hat{n}}{|\vec{b}||\hat{n}|}\right|$
- دو مستویوں $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ اور $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ کے درمیان

زاویہ θ $\cos\theta = \left|\frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\right|$ سے دیا گیا ہے

- ایک نقطہ جس کا مقامی سمتیہ $\vec{a}$ ہے کا مستوی $\vec{r}\cdot\hat{n} = d$ سے فاصلہ $|d - \vec{a}\cdot\hat{n}|$ ہے۔
- ایک نقطہ (x_1, y_1, z_1) کا مستوی $Ax + By + Cz + D = 0$ سے فاصلہ ہے

$$\left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$