1 ضمیمہ

ریاضی میں ثبوت
(PROOFS IN MATHEMATICS)

❖ریاضی کے لئے ثبوت اسی طرح ہیں جیسے شاعری کے لئے۔ خطاطی ۔ ریاضی کے کام میں ثبوت کی موجودگی اتنی ہی اہم ہے جتنا کہ نظموں میں کردار کی موجود گی۔

ولادمیر آرنلڈ❖

A.1.1 تعارف

نویں، دسویں اور گیارھویں جماعتوں میں ہم نے بیانات، مرکب بیان، انکار، معکوس اور ایک بیان کے ضد مثبت، موضوعہ، اندازہ کرنا، مسئلہ اور استخراجی وجوہات کے بارے میں پڑھا ہے۔

A.1.2 ثبوت کیا ہے؟

ریاضیاتی ثبوت کے بیان میں، بیانات تواتر ہوتا ہے، ہر ایک بیان کی وضاحت ایک تعریف کے ساتھ یا ایک موضوعہ یا ایک قضیہ کے لیے کی جاتی ہے جو پہلے ہی بنایا جا چکا تھا صرف اجازت دیئے گئے منطقی اصولوں سے استخراجی طریقہ کا استعمال کرتے ہیں۔

اس طرح ہر ثبوت استخراجی دلیلوں کی ایک زنجیر ہے جس میں ہر ایک جگہ ہوتی ہے اور نتیجہ ہوتا ہے بہت بار ہم، قضیہ کو سیدھے طور پر ثابت کرتے ہیں کہ قضیہ میں کیا دیا گیا ہے۔ لیکن کئی بار قضیہ کے برابر ثابت کرنا قضیہ کو بخود ثابت کرنے سے آسان ہوتا ہے۔ یہ ہمیں ایک قضیہ کو دو طریقے سے ثابت کرنے کی طرف لے جاتا ہے براہ راست یا بالواسطہ اور اس طرح حاصل شدہ ثبوت، براہ راست ثبوت اور بالواسطہ ثبوت کہلاتے ہیں اور اس کے آگے ہر ایک کے تین مختلف راستے ہوتے ہیں جن پر نیچے بحث کی گئی ہے۔

براہ راست ثبوت یہ قضیہ کا وہ ثبوت ہے جس میں ہم براہ راست ثبوت شروع کرتے ہیں کہ قضیہ میں کیا دیا گیا ہے۔

(i) **سیدھے طور پر طریقہ کار** یہ دلیلوں کی ایک زنجیر ہے جو سیدھے طور پر رہنمائی کرتی ہے کہ کیا دیا گیا ہے یا کیا مانا گیا ہے، موضوعہ کی مدد سے تعریفوں یا پہلے ہی ثابت کے گئے مسئلوں کی مدد سے، کہ کیا ثابت کرنا ہے۔ منطقی اصول کا استعمال کر کے۔

ذیل مثالوں پر غور کیجیے

مثال 1 دکھایئے کہ اگر $x^2-5x+6=0$ ہے، تب $x = 3$ یا $x = 2$ ہے۔

حل $x^2-5x+6=0$ (دیا ہوا ہے)

$\Rightarrow (x-3)(x-2) = 0$ (ایک عبارت کو برابر/برابر عبارت سے بدلنے پر)

$\Rightarrow x-3=0$ یا $x-2=0$ (پہلے بنائے گئے مسئلہ $ab = 0 \Rightarrow$ یا تو $a = 0$ یا $b = 0$ ہے، تمام a, b $\mathbf{R}$ کے لیے)

$\Rightarrow x-3+3=0+3$ یا $x-2+2=0+2$ (مساوات کے دونوں طرف یکساں اشیاء جمع کرنے سے مساوات کی طبعی حالت نہیں بدلتی۔

$\Rightarrow x+0 = 3$ یا $x+0 = 2$ (جمع کے ماتحت صحیح اعداد کے لیے تماثلہ خصوصیت کا استعمال کر کے)

$\Rightarrow x = 3$ یا $x = 2$ (جمع کے ماتحت صحیح اعداد کی تماثلہ خصوصیت کا استعمال کر کے)

اس طرح $x^2-5x+6=0$، کا مطلب ہے $x = 3$ یا $x = 2$

تشریح/وضاحت مان لیجیے p دیا ہوا بیان ہے ''$x^2-5x+6=0$'' اور q نیتجتاً بیان ہے ''$x = 3$ یا $x = 2$''

بیان p سے، ہم بیان r نکالتے ہیں: r: ''$(x-3)(x-2) = 0$'' جو کہ بیان p کی عبارت $x^2-5x+6=0$ کو دوسری عبارت $(x-3)(x-2)$ سے بدلتے ہیں جو کہ x^2-5x+6 کے برابر ہے۔

(i) عبارت $(x-3)(x-2)$ کس طرح عبارت x^2-5x+6 کے برابر ہے؟

(ii) ہم ایک عبارت کو دوسری عبارت سے کس طرح بدل سکتے ہیں جو کہ پہلی کے برابر ہو؟

پہلی کو ہم پچھلی جماعتوں میں اجزائے ضربی کے طریقے سے ثابت کر چکے ہیں، یعنی،

$$x^2-5x+6 = x^2-3x-2x+6 = x(x-3)-2(x-3) = (x-3)(x-2)$$

دوسری دلیل کی شکل میں صحیح ہے (منطقی اصولوں سے)

آگے یہ بیان r جملے پر منحصر ہے یا دیا ہوا ہے اور بیان s نکلتا ہے۔ "$x-2=0$ یا $x-3=0$" اور وجوہات بریکٹ میں دی گئی ہیں۔

یہ طریقہ مسلسل چلتا رہتا ہے جب تک ہم کسی نتیجہ پر نہ پہنچ پائیں۔

دلیل کی علامتی برابری استخراج یہ ثابت کرنے کے لیے ہے کہ $p \Rightarrow q$ صحیح ہے۔

p سے شروع کر کے، ہم یہ نکالتے ہیں کہ $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow \ldots \Rightarrow q$۔ اس کا مطلب ہے کہ "$p \Rightarrow q$" صحیح ہے۔

مثال 2: ثابت کیجیے کہ فنکشن $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

جو کہ بیان کیا گیا ہے $f(x)=2x+5$ یک، یک ہے

حل یہ نوٹ کر لیجے کہ فنکشن f یک، یک ہے اگر

(یک، یک فنکشن کی تعریف سے) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

اب، دیا گیا ہے $f(x_1) = f(x_2)$، یعنی $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$

(یکساں مقداریں دونوں طرف جوڑنے پر) $\Rightarrow \quad 2x_1 + 5 - 5 = 2x_2 + 5 - 5$

$\Rightarrow \quad 2x_1 + 0 = 2x_2 + 0$

(حقیقی اعداد کی جمع کا تماثلہ استعمال کرنے پر) $\Rightarrow \quad 2x_1 = 2x_2$

(یکساں غیر صفر مقداروں سے تقسیم کرنے پر) $\Rightarrow \quad \frac{2}{2}x_1 = \frac{2}{2}x_2$

$\Rightarrow \quad x_1 = x_2$

اس طرح، دیا ہوا فنکشن یک، یک ہے۔

(ii) ریاضی کا امالہ

ریاضی کا امالہ، ایک حکمت عملی ہے، ایک قضیہ کو ثابت کرنے کے لیے جو کہ استخراجی ہے۔ اس طریقہ کو حل کرنے کی تمام وجوہات ذیل موضوعہ پر مبنی ہیں۔

N کے ایک دیئے ہوئے ماتحت سیٹ S کے لیے، اگر

(i) طبعی عدد $1 \in S$ اور

(ii) طبعی عدد $k+1 \in S$ جب کہ $k \in S$، تب $S = \mathbf{N}$۔

ریاضی کے امالہ کے اصول کے مطابق، اگر ایک بیان'' $S(n)$'' صحیح ہے $n=1$ کے لیے (اور کسی شروعاتی نقطہ J کے لیے)، اور اگر'' $S(n)$ صحیح ہے $n=K$'' کے لیے کا مطلب ہے کہ'' $S(n)$ صحیح ہے $n = k+1$ کے لیے'' (جب کہ صحیح عدد $k \geq j$ بھی ہوسکتا ہے)، تب بیان کسی بھی مثبت صحیح عدد n کے لیے صحیح ہے، تمام $k \geq j$ کے لیے

اب ہم ذیل مثالوں پر غور دیتے ہیں۔

مثال 3 دکھایئے کہ اگر

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}، \text{تب } A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

حل ہمارے پاس ہے

$$P(n) : A^n \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

ہم نوٹ کرتے ہیں
$$P(1) : A^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

اس لیے، $P(1)$ صحیح ہے

مان لیجیے $P(k)$ صحیح ہے، یعنی۔،

$$P(k) : A^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$$

ہم یہ ثابت کرنا چاہتے ہیں کہ $P(k+1)$ صحیح ہے جب کہ $P(k)$ صحیح ہے، یعنی۔،

$$P(k+1) : A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$$

اب $A^{k+1} = A^k . A$

کیونکہ $P(k)$ صحیح ہے۔ ہمارے پاس ہے۔

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos k\theta \cos\theta - \sin k\theta \sin\theta & \cos k\theta \sin\theta + \sin k\theta \cos\theta \\ -\sin k\theta \cos\theta - \cos k\theta \sin\theta & -\sin k\theta \sin\theta + \cos k\theta \cos\theta \end{bmatrix}$$

(ماترس ضرب ہے)

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$$

اس طرح P(k+1) صحیح ہے جب کہ P(k) صحیح ہے

اس طرح $P(n)$ صحیح ہے تمام $n \geq 1$ (ریاضی کے امالہ کے اصول سے)

(iii) نظیر اور استملاک کے ذریعے ثبوت (Proof by Cases or by exhaustion)

اس بیان کو ثابت کرنے کا طریقہ $p \Rightarrow q$ صرف اسی وقت ممکن ہے جب کہ p کو کئی نظیروں میں توڑا جا سکے (مثال کے طور پر r, s, t) تا کہ $p = r \vee s \vee t$ (جہاں ''V'' 'یا' کے لیے ایک نشان ہو۔)

اگر حالت یہ ہیں

$$r \Rightarrow q$$

$$s \Rightarrow q$$

$$t \Rightarrow q$$

یہ سب ثابت ہو گئے ہیں، تب $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$، ثابت ہو چکا ہے تا کہ $p \Rightarrow q$ ثابت ہو چکا ہے۔ مفروضہ کے ہر ممکن کیس کسی جانچ کرنے کے لیے، یہ طریقہ موجود ہے۔ یہ اسی وقت عملی طور پر آسان ہے جب کہ ممکن کیس کم ہوں۔

مثال 4 دکھائیے کہ ایک مثلث ABC میں،

$$a = b \cos C + c \cos B$$

مان لیجیے ABC ایک مثلث ہے A سے AD عمود BC پر کھینچیے (BC کو آگے بڑھائیے اگر ضروری ہو) جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ کوئی بھی مثلث یا تو حادہ زادیہ یا منفرجہ زاویہ یا زاویہ قائمہ ہونا چاہیے، ہم p کو تین بیانات میں توڑ سکتے ہیں۔ r-S اور t میں، جہاں

r : ABC ایک زاویہ حادہ مثلث ہے جہاں ∠C ایک حادہ زاویہ ہے۔

s : ABC ایک زاویہ منفرجہ مثلث ہے، جہاں ∠C ایک منفرجہ زاویہ ہے۔

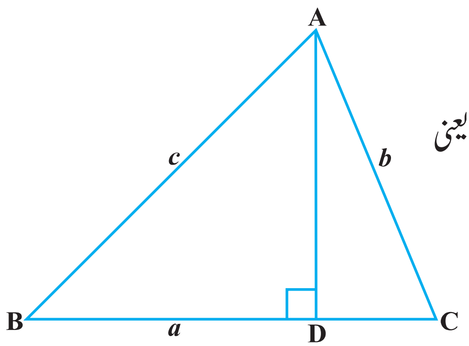
ABC:t ایک زاویہ قائمہ مثلث ہے، جہاں $\angle C$ ایک قائمہ زاویہ ہے۔

اس طرح، ہم مسئلہ کو تین نظیروں (Cases) کے ذریعہ ثابت کرتے ہیں۔

نظیر (i) جبکہ $\angle C$ کے حادہ زاویہ ہے (شکل A1.1)

قائم زاوی مثلث ADB سے

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$



(شکل A1.1)

یعنی $BD = AB \cos B$

$= c \cos B$

قائم زاوی مثلث ADC سے

$$\frac{CD}{AC} = \cos C$$

یعنی $CD = AC \cos C$

$= b \cos C$

اب $CD = AC \cos C$

$= b \cos C$

کیس (ii) جب $\angle C$، زاویہ مفرجہ ہے (شکل A1.2)

قائم زاوی مثلث ADB سے

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

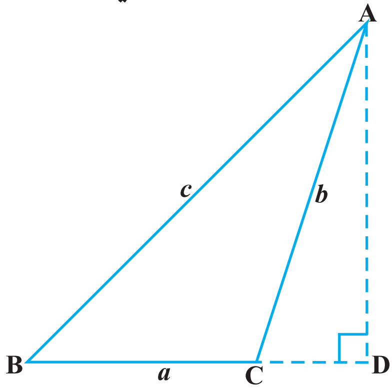
یعنی $BD = AB \cos B$

$= c \cos B$

قائم زاوی مثلث ADC سے

$$\frac{CD}{AC} = \cos \angle ACD$$

$= \cos (180° - C)$



شکل A1.2

$= - \cos C$

یعنی $CD = - AC \cos C$

$= - b \cos C$

اب $a = BC = BD - CD$

یعنی $a = c \cos B - (-b \cos C)$

$a = c \cos B + b \cos C \qquad \ldots (2)$

نظیر (کیس) (iii) جب کہ $\angle C$ ایک قائم زاوی مثلث ہے (شکل A1.3)

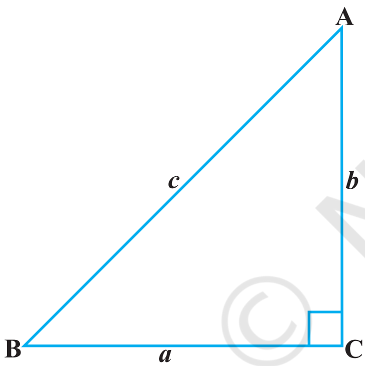
قائم زاوی مثلث ACB سے،

$\frac{BC}{AB} = \cos B$

یعنی $BC = AB \cos B$

$a = c \cos B,$

اور $b \cos C = b \cos 90^\circ = 0$



شکل A1.3

اس طرح ہم لکھ سکتے ہیں

$a = 0 + c \cos B$

$= b \cos C + c \cos B \ldots (3)$

(1)، (2) اور (3) سے ہم یہ دکھاتے ہیں (ادا کرتے ہیں) کہ

$a = b \cos C + c \cos B$

نظیر (i) سے، $q \Rightarrow r$ ثابت ہوا ہے

نظیر (ii) سے، $q \Rightarrow s$ ثابت ہوا ہے

نظیر (iii) سے، $q \Rightarrow s$ ثابت ہوا ہے

اس طرح کیسوں کے ثبوت سے، $(r \vee s \vee t)$ ثابت ہوا ہے۔ یعنی $q \Rightarrow p$ ثابت ہوا ہے۔ بالواسطہ طور پر دیئے ہوئے

قضیہ کو ثابت کرتے ہیں جو کہ دیئے ہوئے قضیہ کے برابر ہوتا ہے۔

(i) **تضاد کے ذریعے ثبوت (ریڈو سئیواڑ اب سردم):** یہاں ہم یہ مانتے ہوئے شروع کرتے ہیں کہ دیا ہوا بیان غلط ہے۔ منطق کے اصولوں سے، ہم ایک نتیجہ پر پہنچتے ہیں جو کہ مانے ہوئے ہیں کے متضاد ہے اوراس طرح ہم یہ اندازہ لگاتے ہیں کہ ہم نے جو مانا ہے وہ غلط ہے اوراس طرح دیا ہوا بیان درست ہے۔

ہم اب اس طریقے کو ایک مثال کے ذریعے سمجھاتے ہیں۔

مثال 5 دکھایئے کہ تمام مفرد اعداد لامحدود ہوتے ہیں۔

حل: مان لیجیے p تمام مفرد اعداد کا سیٹ ہے۔ ہم اس بیان کا الٹا لیتے ہیں ''تمام مفرد اعداد کا سیٹ لامحدود نہیں ہے''، یعنی ہم مانتے ہیں کہ تمام مفرد اعداد کا سیٹ محدود ہے۔ اس طرح، ہم تمام مفرد اعداد کی فہرست بنا سکتے ہیں۔ جیسے (مان لیجیے) $P_1, P_2, P_3,..., P_k$ ۔ یہ نوٹ کر لیجیے کہ ہم نے یہ مانا ہے کہ کوئی بھی مفرد عدد $P_1, P_2, P_3,..., P_k$ کے علاوہ نہیں ہے۔

اب غور کیجیے کہ $N = (P_1\ P_2\ P_3...P_k) + 1 \quad ...\ (1)$

N فہرست میں نہیں ہے کیونکہ N، فہرست میں موجود کسی بھی نمبر سے بڑا ہے

N یا تو مفرد ہے یا غیر مفرد ہے

اگر N ایک مفرد عدد ہے، تب (1) سے ایسا ایک مفرد عدد موجود ہے جو فہرست میں موجود نہیں ہے۔

دوسری طرف، اگر N غیر مفرد عدد ہے، اس کا ایک مفرد تقسیم علیہ ہوگا۔ لیکن فہرست میں موجود کوئی بھی عدد N کو تقسیم نہیں کر سکتا، کیونکہ سب میں '1' باقی بچتا ہے۔ اس لیے مفرد تقسیم علیہ فہرست میں '1' سے جدا ہونا چاہئے۔

اس طرح، ہمارا ماننا کہ تمام مفرد اعداد کا سیٹ محدود ہے غلط ہے۔

اس لیے، تمام مفرد اعداد کا سیٹ لامحدود ہے۔

> **نوٹ** مشاہدہ کیجیے کہ اوپر کا ثبوت بھین نظیروں کے ثبوت کا طریقہ استعمال کرتے ہیں۔

(ii) دیئے ہوئے بیان کے ضد مثبت کے استعمال سے ثبوت

ایک خسرہ کا ضد مثبت $p \Rightarrow q$ شرطی ثبوت دینے کی بجائے، ہم اس کے معادل ثابت کرتے ہیں، یعنی، $\sim q \Rightarrow \sim p$

(طلباء خود اس کی جانچ کر سکتے ہیں۔)

خسرہ کا ضد مثبت تقاعل نتیجہ اور مفروضہ کو آپس میں بدلنے اور دونوں کو منفی کرنے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 6 ثابت کیجیے کہ فنکشن $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ جو کہ $f(x)=2x+5$ سے بیان کیا گیا ہے یک۔ یک ہے۔

حل ایک فنکشن یک۔ یک ہے اگر $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

اس کا استعمال کرتے ہمیں دکھانا ہے کہ'' $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$ ''$\Rightarrow$'' $x_1 = x_2$ '' $p \Rightarrow q$ کی شکل کا ہے، جہاں $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$ ،p ہے اور $q: x_1 = x_2$ ہے۔ ہم اسے مثال 2 میں ''براہ راست طریقہ'' سے ثابت کر چکے ہیں۔

ہم اسے بیان کے عکس تقابل استعمال کر کے بھی ثابت کر سکتے ہیں۔ اب اس بیان کا عکس تقابل $\sim q \Rightarrow \sim p$ ہے یعنی،

عکس تقابل کا ''اگر $f(x_1) = f(x_2)$ تب $x_1 = x_2$ ہے'' ''اگر $x_1 \neq x_2$، تب $f(x_1) \neq f(x_2)$ ''

اب
$$\begin{aligned} & x_1 \neq x_2 \\ \Rightarrow \quad & 2x_1 \neq 2x_2 \\ \Rightarrow \quad & 2x_1 + 5 \neq 2x_2 + 5 \\ \Rightarrow \quad & f(x_1) \neq f(x_2) \end{aligned}$$

کیونکہ ''$\sim q \Rightarrow \sim p$''، معادل ہے ''$q \Rightarrow p$'' کے ثبوت مکمل ہے

مثال 7 دکھایئے کہ ''اگر ماترس A قابلِ تعکیس ہے، تب A غیر نادر ہے۔''

حل اوپر کے بیان کو علامتی طور پر لکھنے پر، ہمارے پاس ہے ''$p \Rightarrow q$''، جہاں، p ہے ''ماترس A قابلِ تعکیس ہے،'' اور q ہے ''A ایک غیر نادر ہے''

دیئے ہوئے بیان کو ثابت کرنے کی بجائے ہم اس کا عکس تقابل ثابت کرتے ہیں، یعنی، اگر A ایک غیر نادر ماترس ہے، تب ماترس A غیر قابلِ تعکیس نہیں ہے۔

ایک A ایک غیر نادر ماترس ہے، تب اس کا مطلب ہے کہ ماترس A نادر ہے، یعنی،

$$|A| = 0$$

تب $A^{-1} = \dfrac{adj\ A}{|A|}$ موجود نہیں ہے کیونکہ $|A| = 0$ ہے۔

اس طرح، ہم نے ثابت کر دیا ہے کہ اگر A ایک غیر نادر ماترس نہیں ہے، تب A قابلِ تعکیس نہیں ہے، یعنی $\sim q \Rightarrow \sim p$،
اس لیے، اگر ایک ماترس A تقلیبی ہے، تب A غیر نادر ہے۔

(iii) ایک منفی (Counter) مثال کے ذریعے ثبوت

ریاضی کی تاریخ میں، بہت سے ایسے مواقع موجود ہیں جہاں ایک بیان کا معتبر ثبوت معلوم کرنے کی تمام کوششیں ناکام رہی ہیں اور بیان کی حقیقی قدر کی بے اعتمادی حل نہیں ہو پائی ہے۔

اس طرح کے حالات میں، یہ ہمارے لیے بہتر کہ، ہم اس طرح کی ایک مثال معلوم کر لیں جہاں جو بیان کو غلط ثابت کر دے۔ وہ مثال جو بیان کو غلط ثابت کرتی ہے منفی مثال کہلاتی ہے۔ کیونکہ قضیہ کا غیر ثبوت $p \Rightarrow q$ لگ بھگ قضیہ کا ثبوت ہے۔ $\sim(p \Rightarrow q)$ اس لیے ثابت کرنے کا یہ بھی ایک طریقہ ہے۔

مثال 8 ہر ایک n کے لیے $n, 2^{2^n}+1$ ایک مفرد ہے $(n \in N)$

ثبوت: یہ ایک بار سوچا تھا۔ صحیح ہوگا اس کو مدنظر رکھتے ہوئے کہ

$2^{2^1}+1 = 2^2+1 = 5$ ایک مفرد ہے

$2^{2^2}+1 = 2^4+1 = 17$ ایک مفرد ہے

$2^{2^3}+1 = 2^8+1 = 257$ ایک مفرد ہے

حالانکہ، پہلی نظر میں عام کیا ہوا صحیح لگتا ہے۔ لیکن، وقوعائی طور پر یہ دکھایا گیا تھا کہ

$$2^{2^5}+1 = 2^{32}+1 = 4294967297$$

جو کہ منفرد نہیں ہے کیونکہ $4294967297 = 641 \times 6700417$ (دو اعداد کا حاصل ضرب)

اس لیے عام طور پر "n" کے لیے، $2^{2^n}+1$ کافی ہے اس عام اصول کا غلط ثابت کرنے کے لیے۔ یہ ایک مخالف مثال ہے۔

اس طرح ہم نے یہ ثابت کر دیا ہے کہ عام اصول n کے لیے $2^{2^n}+1$ ایک مفرد ہے $(n \in N)$ کے لیے، عام طور پر صحیح نہیں ہے۔

مثال 9 ہر مسلسل تفاعل تفرق پذیر ہے۔

ثبوت: ہم کچھ تفاعل پر غور کرتے ہیں جو دیئے گئے ہیں۔

(i) $f(x) = x^2$

(ii) $g(x) = e^x$

(iii) $h(x) = \sin x$

یہ فنکشن x کی تمام قدروں کے لیے مسلسل ہیں۔ اگر ہم ان کی تفرق پذیری کی جانچ کریں، ہم نے دیکھا یہ x کی تمام قدروں کے لیے تفرق پذیر ہیں۔ یہ ہمیں اس بات پر یقین کرنے کے لیے مجبور کر دیتا ہے کہ عموی طور پر ''ہر ایک مسلسل فنکشن تفرق پذیر ہے'' صحیح ہوسکتا ہے۔ لیکن اگر ہم ایک فنکشن کی تفرق پذیری کی جانچ کریں جو کہ دیا گیا ہے ''$\phi(x)=|x|$'' سے جو کہ مسلسل ہے، ہم دیکھتے ہیں کہ یہ $x=0$ پر تفرق پذیر نہیں ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ بیان ''ہر ایک مسلسل فنکشن تفرق پذیر ہے'' غلط ہے، عام طور پر۔ اس لمحہ پر ایک فنکشن ''$\phi(x)=|x|$'' بیان کو غیر ثابت کرنے کے لیے کافی ہے۔ اس لیے ''$\phi(x)=|x|$'' ایک مخالف مثال کہلاتی ہے اسے غیر ثابت کرنے کے لیے کہ ''ہر ایک مسلسل فنکشن تفرق پذیر ہوتا ہے۔''