باب 6

5259CH06

مشتق کا اطلاق
(APPLICATION OF DERIVATIVES)

❖اگر احصا ایک چابی ہے ،قدرتی ردو بدل کو سمجھانے کے لئے
ریاضی کو کامیابی کے ساتھ لاگو کیا جا سکتا ہے - وہائٹ ہیڈ❖

6.1 تعارف

باب 5 میں ہم نے پڑھا ہے تم کس طرح ترکیبی تفاعلات ،معکوس ٹرگنومیٹریائی تفاعلات ،مضمر تفاعلات ،قوت نما تفاعلات اور لوگارتم تفاعلات کا مشتق کیسے معلوم کیا جا تا ہے۔اس باب میں ہم پڑھیں گے کہ مشتق کے اطلاق کو دوسرے شعبوں میں کس طرح لاگو کیا جا تا ہے،مثال کے طور پر،انجینئرنگ ،سائنس ،سوشل سائنس اور بہت سے دوسرے میدانوں میں،اس کے ساتھ ہم یہ بھی پڑھیں گے کہ مشتق کا استعمال کس طرح کیا جا تا ہے (i) اشیاء کی تبدیلی کی شرح دریافت کرنے کے لیے (ii) مماس اور نارمل کی مساواتوں کو منحنی کے ایک نقطہ پر معلوم کرنا (iii) تفاعلات کے گراف پر گھومتے ہوئے نقاط کا دریافت کرنا جو ہماری مدد نقاط کو ڈھونڈنے میں کریں گے جس پر بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قدر (مقامی) تفاعلات کو ملتی ہیں ۔ہم تفاعلات کا استعمال وقفہ دریافت کرنے کے لیے بھی کریں گے جہاں تفاعلات تبدیل ہو رہے ہیں ۔آخر میں ،ہم مشتق کا استعمال کچھ اشیاء کی تقریباً قدر دریافت کرنے کے لیے کریں گے۔

6.2 مقداروں کی شرح تبدیلی

اسے یاد کیجئے کہ مشق $\frac{ds}{dt}$ سے، ہمارا مطلب ہے فاصلہ s کی شرح تبدیلی وقت t کو مدنظر رکھتے ہوئے۔اسی طرح سے، جب کبھی بھی ایک شئے y دوسری شئے x کے ساتھ بڑھتی یا گھٹتی ہے جو کسی اصول $y = f(x)$ کو مطمئن کرتی ہے ،تب $\frac{dy}{dx}$ (یا $f'(x)$) y کی x لحاظ سے تبدیلی کی شرح کو ظاہر کرتا ہے $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ (یا $f'(x_0)$) y کی x کے لحاظ سے $x = x_0$ پر تبدیلی کی شرح کو ظاہر کرتا ہے۔

اس کے آگے ،اگر دو متغیر x اور y ایک دوسرے متغیر t کے ساتھ تبدیل ہو رہے ہوں،یعنی اگر $x = f(t)$ اور $y = g(t)$ ہے،تب زنجیری اصول سے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} \quad \text{اگر تو} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

اس طرح y کی تبدیلی x کے ساتھ کا اندازہ لگایا جاسکتا ہے y کی شرح تبدیلی استعمال کر کے اور x کی t کو مدنظر رکھتے ہوئے ہم ذیل مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 1 ایک دائرہ کے رقبے کی شرح تبدیلی فی سیکنڈ اس کے نصف قطر کی مناسبت سے دریافت کیجیے جبکہ $r = 5$ سینٹی میٹر ہے

حل دائرہ کا رقبہ نصف قطر x کے ساتھ دیا گیا ہے $A = \pi r^2$ ۔اس لیے رقبہ A کی شرح تبدیلی نصف قطر x کی مناسبت سے $\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r$ سے دی گئی ہے ۔جب $r=5$ سینٹی میٹر، $\frac{dA}{dr} = 10\pi$ ہے ۔اس طرح ،دائرہ کا رقبہ 10π مربع سینٹی میٹر $10\pi\text{cm}^2/\text{s}$ کی در سے تبدیل ہو رہا ہے۔

مثال 2 ایک کعب کا حجم 9 مکعب سینٹی میٹر فی سیکنڈ کی شرح سے بڑھ رہا ہے ۔جب ایک کنارے کی لمبائی 10 سینٹی میٹر ہو تو بتائیے کہ سطحی رقبہ کتنی تیزی سے بڑھ رہا ہے۔

حل مان لیجیے ایک ضلع کی لمبائی x ہے، v، حجم ہے اور سطح رقبہ s ہے کعب کا ۔تب $V = x^3$ اور $S = 6x^2$ ہے، جہاں x وقفہ t کا فنکشن ہے۔

اب
$$\frac{dV}{dt} = 9\text{cm}^3/\text{s} \quad (\text{دیا ہوا ہے})$$

اس لیے
$$9 = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(x^3) = \frac{d}{dx}(x^3)\cdot\frac{dx}{dt} \quad (\text{زنجیری اصول سے})$$

$$= 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

یا
$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{x^2} \qquad \ldots(1)$$

اب
$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(6x^2) = \frac{d}{dx}(6x^2)\cdot\frac{dx}{dt} \quad (\text{زنجیری اصول سے})$$

$$= 12x \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right) = \frac{36}{x}$$ ((1) کا استعمال کرکے)

جب، اس لیے $x = 10\text{cm}, \quad \frac{dS}{dt} = 3.6\ \text{cm}^2/\text{s}$

مثال 3 ایک پتھر ایک خاموش جھیل میں پھینکا گیا اور لہریں دائرہ کی شکل میں 4 سینٹی میٹر فی سیکنڈ کی رفتار سے آگے بڑھیں لمحہ جب دائری لہر کا نصف قطر 10 سینٹی میٹر ہے، اس سے گھرا ہوا رقبہ کتنی رفتار (یا تیزی سے) بڑھ رہا ہے؟

حل ایک دائرہ کا رقبہ A جس کا نصف قطر r ہے دیا گیا ہے۔ $A = \pi x^2$ سے۔ اس لیے، رقبہ A کی شرح تبدیلی وقت t کے ساتھ ہے۔

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = \frac{d}{dr}(\pi r^2) \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$ (زنجیری اصول سے)

یہ دیا ہوا ہے کہ $\frac{dr}{dt} = 4$ سینٹی میٹر فی سیکنڈ

اس لیے جب $r = 10$ سینٹی میٹر ہے $\quad \frac{dA}{dt} = 2\pi(10)(4) = 80\pi$

اس طرح گھرا ہوا رقبہ 80π کی شرح سے بڑھ رہا ہے، جب $r = 10$ سینٹی میٹر ہے۔

> **نوٹ** $\frac{dy}{dx}$ مثبت ہے اگر y بڑھتا ہے جیسے ہی x بڑھتا ہے اور منفی ہے اگر y گھٹ رہا ہے جب کہ x بڑھ رہا ہے۔

مثال 4 ایک مستطیل کی لمبائی x، 3 سم فی منٹ کی شرح سے گھٹ رہی ہے اور چوڑائی y کی شرح سے بڑھ رہی ہے۔ جب $r = 10$ سینٹی میٹر اور $y = 6$ سینٹی میٹر ہے، شرح تبدیلی معلوم کیجیے (a) احاطہ کی (b) مستطیل کے رقبہ کی۔

حل کیونکہ لمبائی x گھٹ رہی ہے اور چوڑائی y بڑھ رہی ہے وقت کے ساتھ، ہمارے پاس ہے۔

$\frac{dy}{dt} = 2$ سینٹی میٹر فی منٹ $\quad$ اور $\quad \frac{dx}{dt} = -3$ سینٹی میٹر فی منٹ

(a) احاطہ P ایک مستطیل کا دیا گیا ہے۔

$$P = 2(x + y)$$

اس لیے $\frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right) = 2(-3 + 2) = -2$ سینٹی میٹر فی منٹ

(b) مستطیل کا رقبہ A دیا گیا ہے۔

$$A = x \cdot y$$

اس لیے $$\frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dt}$$

(کیونکہ $x = 10$ سینٹی میٹر اور $y = 6$ سینٹی میٹر ہے) $= -3(6) + 10(2)$

$= 2$ مربع سینٹی میٹر فی منٹ

مثال 5 کل قیمت $c(x)$ روپیوں میں، ایک شئے کے x یونٹ پیداوار کے ساتھ اس طرح منسلک دیا گیا ہے۔

$$C(x) = 0.005x^3 - 0.02x^2 + 30x + 5000$$

حاشیائی قیمت معلوم کیجیے جب کہ پیداوار 3 یونٹ ہو، جہاں حاشیائی پیداوار سے ہمارا مطلب ہے فوری طور پر کسی بھی وقت پیداوار کی کل قیمت کی شرح تبدیلی۔

حل ہمارے پاس ہے۔

حاشیائی قیمت $$(MC) = \frac{dC}{dx} = 0.005(3x^2) - 0.02(2x) + 30$$

جبکہ $$x = 3, MC = 0.015(3^2) - 0.04(3) + 30$$

اس لیے مطلوبہ حاشیائی قیمت 30.02 روپے ہے (قریب قریب)

مثال 6 ایک شئے کی پیداوار کے x یونٹ کی بکری سے جو کل رقم روپیوں میں حاصل ہوئی ہے وہ $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ سے دی گئی ہے، حاشیائی آمدنی معلوم کیجیے، جبکہ $x = 5$ ہے، جہاں حاشیائی آمدنی سے ہمارا مطلب ہے کل آمدنی کا اس کے اسی لمحہ کے ہوئے سامان کی تعداد کی شرح تبدیلی۔

حل کیونکہ حاشیائی آمدنی کل آمدنی کی شرح تبدیلی ہے جس کے یونٹ کی تعداد کے ساتھ، ہمارے پاس ہے۔

حاشیائی آمدنی $$(MR) = \frac{dR}{dx} = 6x + 36$$

جب کہ $$x = 5, MR = 6(5) + 36 = 66$$

اس لیے، مطلوبہ حاشیائی آمدنی 66 روپے ہے۔

مشق 6.1

1۔ ایک دائرہ کے رقبہ کا شرح تبدیلی نصف قطر r کو مدنظر رکھتے ہوئے معلوم کیجیے جب کہ
(a) $r = 3$ سینٹی میٹر (b) $r = 4$ سینٹی میٹر

2۔ ایک کعب کا حجم مکعب سینٹی میٹر فی سیکنڈ کی شرح سے بڑھ رہا ہے۔ سطحی رقبہ کس رفتار سے بڑھ رہا ہے جب کہ ایک کنارے کی لمبائی 12 سینٹی میٹر ہے؟

3۔ دائرہ کا رقبہ ایک مسلسل 3 سینٹی میٹر فی سیکنڈ کی رفتار سے بڑھ رہا ہے۔ معلوم کیجیے دائرہ کا رقبہ کس رفتار سے بڑھ رہا ہے جب کہ نصف قطر 10 سینٹی میٹر ہے۔

4۔ متغیر کعب کا ایک کنارہ 3 سینٹی میٹر فی سیکنڈ کی رفتار سے بڑھ رہا ہے۔ کعب کا حجم کس رفتار سے بڑھ رہا ہے جب کہ کنارہ 10 سینٹی میٹر لمبا ہے؟

5۔ ایک پتھر ایک خاموش جھیل میں پھینکا گیا اور لہریں دائری انداز میں 5 سینٹی میٹر فی سیکنڈ کی رفتار سے آگے بڑھیں۔ اس لمحہ جب کہ دائری لہر کا نصف قطر 8 سینٹی میٹر ہے، بند رقبہ کس رفتار سے بڑھ رہا ہے؟

6۔ ایک دائرہ کا رقبہ 0.7 سینٹی میٹر فی سیکنڈ کی شرح سے بڑھ رہا ہے۔ اس کے احاطہ کے بڑھنے کی شرح معلوم کیجیے؟

7۔ ایک مستطیل کی لمبائی 5 سینٹی میٹر فی منٹ کی رفتار سے گھٹ رہی ہے اور اس کی چوڑائی 4 سینٹی میٹر فی منٹ کی رفتار سے بڑھ رہی ہے جب کہ $x=8$ سینٹی میٹر اور $y=6$ سینٹی میٹر ہو، تب شرح تبدیلی معلوم کیجیے (a) احاطہ، اور (b) مستطیل کا رقبہ۔

8۔ ایک غبارہ، جو ہوا بھرنے پر ہمیشہ کرہ کی شکل میں رہتا ہے، میں 900 مکعب سینٹی میٹر فی سیکنڈ کے حساب سے ہوا ڈالی جا رہی ہے۔ وہ شرح معلوم کیجیے جس سے غبارہ کا نصف قطر بڑھ رہا ہے جب کہ نصف قطر 15cm ہے۔

9۔ ایک غبارہ جس کا نصف قطر متغیر ہے ہمیشہ کرہ کی شکل میں رہتا ہے۔ اس کے حجم کی نصف قطر کے ساتھ بڑھنے کی شرح معلوم کیجیے جب کہ بعد والا 10cm ہے۔

10۔ ایک سیڑھی جس کی لمبائی 5 میٹر ہے ایک دیوار کے سہارے کھڑی ہے۔ سیڑھی کا نیچے کا سرا، دیوار سے دور 2 سینٹی میٹر فی سیکنڈ کی شرح سے کھینچا گیا۔ اس کی اونچائی دیوار پر کتنی گھٹ رہی ہے جب کہ سیڑھی کے پیر دیوار سے 4 میٹر کے فاصلے پر ہیں؟

11۔ ایک ذرہ ایک منحنی $6y = x^3+2$ کے ساتھ بڑھ رہا ہے۔ منحنی پر وہ نقاط دریافت کیجیے جہاں y– مختص x– مختص سے 8 گنا رفتار سے بڑھ رہا ہے۔

12۔ ایک ہوا کے بلبلے کا نصف قطر $\frac{1}{2}$ سینٹی میٹر فی سیکنڈ شرح سے بڑھ رہا ہے۔ بلبلے کا حجم کس شرح سے بڑھ رہا ہے جب کہ نصف قطر 1 سینٹی میٹر ہے؟

13۔ ایک غبارہ، جو کہ ہمیشہ کرئی شکل میں رہتا ہے کا متغیر قطر $\frac{3}{2}(2x+1)$ ہے اس کے حجم کی تبدیلی کی شرح x کے ساتھ معلوم کیجیے۔

14۔ ایک پائپ سے ریت 12 مکعب سینٹی میٹر فی سیکنڈ شرح سے باہر آ رہا ہے۔ گرتا ہو ریت زمین پر ایک مخروط شکل اس طرح بنا دیتا ہے کہ مخروط کی اونچائی ہمیشہ اس کے اساس کے نصف قطر کا چھٹا حصہ ہے۔ ریت کے مخروط کی اونچائی کتنی تیزی سے بڑھ رہی ہے جب کہ اس کی اونچائی 4 سینٹی میٹر ہے؟

15۔ کل قیمت $C(x)$ روپیوں میں ایک شئے کے x یونٹ کی پیداوار پر مبنی ہے۔ جو کہ دیا گیا ہے

$$C(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$$

17 یونٹ کی پیداوار کی حاشیائی قیمت معلوم کیجیے۔

16۔ ایک شئے کے x یونٹ کی فروخت سے کل حاصل شدہ رقم روپیوں میں اس طرح دی گئی ہے۔

$$R(x) = 13x^2 + 26x + 15$$

حاشیائی رقم معلوم کیجیے جب کہ $x = 7$ ہے۔

سوال 17 اور 18 میں صحیح جواب چنیے۔

17۔ ایک دائرہ کا رقبہ کی اس کے نصف قطر کو مدنظر رکھتے ہوئے شرح تبدیلی معلوم کیجیے جب کہ $r = 6$ سینٹی میٹر ہے۔

(A) 10π (B) 12π (C) 8π (D) 11π

18۔ ایک شئے کے x یونٹ کی فروخت سے کل حاصل شدہ رقم روپیوں میں اس طرح دی گئی ہے۔

حاشیائی رقم جب کہ $x = 15$ ہے۔

(A) 116 (B) 96 (C) 90 (D) 126

6.3 بڑھتے اور گھٹتے ہوئے تفاعلات

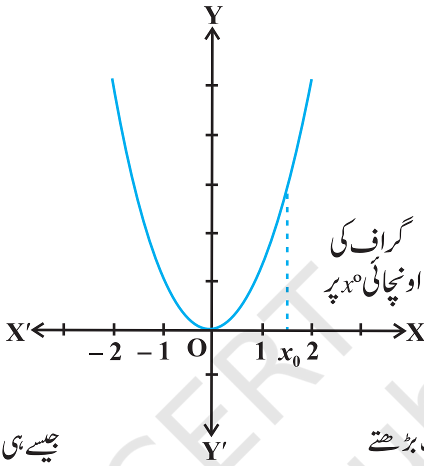
اس سیکشن میں یہ معلوم کرنے کے لیے تفرق کا استعمال کریں گے کہ کیا تفاعلات بڑھ رہا ہے یا گھٹ رہا ہے یا کچھ نہیں ہو رہا ہے۔

تفاعل f پر غور کیجیے جو کہ $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ سے دیا گیا ہے۔ اس تفاعل کا گراف ایک مکانی ہے جو کہ شکل 6.1 میں دیا گیا ہے۔

مبداسے بائیں طرف قدریں

$f(x) = x^2$	
$\frac{9}{4}$	$-\frac{3}{2}$
$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$

جیسے ہی ہم بائیں سے دائیں کی طرف بڑھتے ہیں گراف کی اونچائی کم ہوجاتی ہے۔



شکل 6.1

مبداسے دائیں طرف قدریں

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

جیسے ہی ہم بائیں سے دائیں کی طرف بڑھتے ہیں گراف کی اونچائی بڑھ جاتی ہے۔

پہلے ہم مبداء سے دائیں طرف کے گراف (شکل 6.1) پر غور کریں گے۔ اس کا مشاہدہ کیجیے کہ ہم گراف کے ساتھ بائیں سے دائیں چلتے ہیں، گراف کی اونچائی لگاتار بڑھ رہی ہے۔ اس وجہ کے لیے، حقیقی اعداد $x>0$ کے لیے کہا گیا ہے کہ تفاعل بڑھ رہا ہے۔

اب غور کیجیے کہ گراف مبداسے بائیں طرف ہے اور یہاں مشاہدہ کیجیے کہ ہم گراف کے ساتھ بائیں سے دائیں طرف چلیں، گراف کی اونچائی لگاتار گھٹ رہی ہے۔ نتیجتاً کہا جاتا ہے کہ حقیقی اعداد $x < 0$ کے لیے تفاعل گھٹ رہا ہے۔

اب ہمیں ذیل تحلیلی تعریفیں دینی چاہتے ہیں ایک تفاعل کے لیے جو ایک وقفہ پر بڑھ یا گھٹ رہا ہے۔

تعریف 1 مان لیجیے 1 ایک کھلا ہوا وقفہ ہے جو کہ ایک حقیقی قدر والے تفاعل f کے حلقہ میں موجود ہے۔ تب f کو کہا جاتا ہے۔

(i) I پر بڑھ رہا ہے اگر $x_1 < x_2$ I میں ہے $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ تمام $x_1, x_2 \in 1$ کے لیے۔

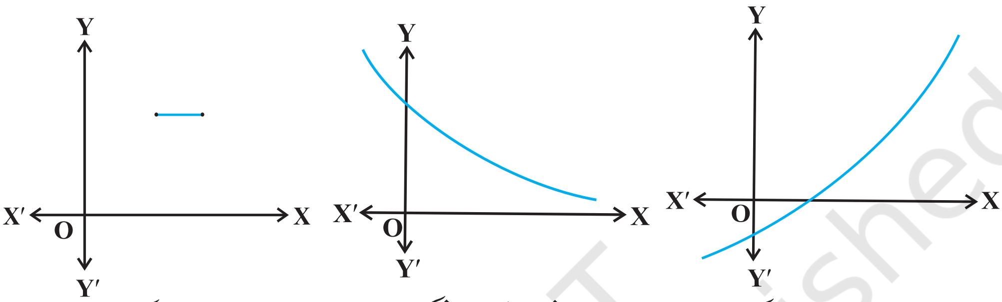
(ii) I پر کم ہو رہا ہے اگر x_1, x_2 I میں ہے $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ تمام، $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$ کے لیے۔ I میں منتقل ہے اگر $f(x)=C$ تمام $2 \in I$ جہاں C ایک مستقلہ

(iii) I پر کم ہو رہا ہے اگر $x_1 < x_2$ میں ہے $\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ تمام، $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$ کے لیے۔

(iv) I پر سختی سے کم ہو رہا ہے اگر $x_1 < x_2$ I میں ہے $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow$، تمام $x_1, x_2 \in I$ کے لیے۔

اس طرح کے فنکشن کو گراف کے ذریعہ دکھانے کے لیے شکل 6.2 دیکھیے۔

اب ہم بیان کریں گے جب کہ ایک فنکشن ایک نقطہ پر بڑھ رہا یا گھٹ رہا ہے۔



(iii) گھٹتا ہوا فنکشن (ii) سختی سے گھٹتا ہوا فنکشن (i) سختی سے بڑھتا ہوا فنکشن

شکل 6.2

تعریف 2 مان لیجیے ایک حقیقی قدر والے فنکشن f کی تعریف کے علاقہ میں x_0 ایک نقطہ ہے۔ تب یہ کہا جاتا ہے کہ f بڑھ رہا ہے، گھٹ رہا ہے x_0 پر اگر ایک کھلا ہوا وقفہ I جس میں x_0 شامل ہے تا کہ f بالترتیب بڑھ رہا ہے، گھٹ رہا ہے I میں ہمیں اس تعریف کی صفائی دینی ہے بڑھتے ہوئے فنکشن کے مسئلہ میں

مثال 7 دکھایئے کہ فنکشن f جو کہ $f(x)=7x-3$ سے دیا گیا ہے R پر بڑھ رہا ہے۔

حل مان لیجیے x_1 اور x_2، R میں دو اعداد ہیں۔ تب

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 7x_1 < 7x_2 \Rightarrow 7x_1 - 3 < 7x_2 - 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

اس طرح، تعریف 1 سے یہ نکلتا ہے کہ R پر f سختی سے بڑھ رہا ہے۔

اب ہمیں بڑھتے ہوئے اور گھٹتے ہوئے فنکشن کے لیے پہلے مشتق جانچ کو دیا جائے۔ اس جانچ کے ثبوت کے لیے درمیانہ قدر مسئلہ درکار ہے جو کہ باب 5 میں پڑھا ہے۔

مسئلہ 1 مان لیجیے f $[a,b]$ پر مسلسل ہے اور کھلے ہوئے وقفہ (a,b) پر تفرق پذیر ہے۔ تب

(a) f، $[a,b]$ میں بڑھ رہا ہے اگر $f'(x) > 0$ ہے ہر ایک $x \in (a, b)$ کے لیے

(b) $[a,b]$, f میں گھٹ رہا ہے اگر $f'(x) < 0$ ہے ہر ایک $x \in (a, b)$ کے لیے

(c) $[a,b]$ میں f مستقل فنکشن ہے اگر $f'(x) = 0$ ہے ہر ایک $x \in (a, b)$ کے لیے

ثبوت (a) مان لیجیے $x_1, x_2 \in [a, b]$ تا کہ $x_1 < x_2$

تب، درمیانی قدر مسئلہ (باب 5 میں مسئلہ 8) x_1 اور x_2 کے درمیان ایک نقطہ موجود ہے تا کہ

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

یعنی $f(x_2) - f(x_1) > 0$ (جیسا کہ دیا $f'(c) > 0$ دیا ہوا ہے)

یعنی $f(x_2) > f(x_1)$

اس طرح ہمارے پاس ہے۔

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ تمام $x_1, x_2 \in [a,b]$ کے لیے

اس لیے $[a,b]$ میں f ایک بڑھتا ہوا فنکشن ہے۔

حصہ (b) اور (c) ایک جیسے ہیں۔ یہ پڑھنے والے کے لیے ایک مشق کے طور پر چھوڑا گیا ہے۔

ریمارکس

(i) یہاں ایک تعمیم شدہ مسئلہ ہے جس کی رو سے اگر x کسی کھلے وقفہ میں مسلسل ہے تو $f'(x)>0$۔ تب f بڑھتا ہوا تفاعل ہے۔ اسی طرح سے اگر x کسی کھلے وقفہ میں مسلسل ہے تو $f'(x)>0$ تب f ایک گھٹتا ہوا تفاعل ہے۔

مثال 8 دکھائیے کہ فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے۔

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x, x \in \mathbf{R}$$

سے **R** میں بڑھ رہا ہے۔

حل یہ نوٹ کر لیجیے کہ

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

$$= 3(x^2 - 2x + 1) + 1$$

$= 3(x-1)^2 + 1 > 0$ ہر ایک وقفہ **R** میں

اس لیے تفاعل f، **R** میں سختی سے بڑھ رہا ہے۔

مثال 9 ثابت کیجیے کہ فنکشن جو کہ $f(x) = \cos x$ دیا گیا ہے۔

(a) گھٹ رہا ہے $(0,\pi)$ میں

(b) بڑھ رہا ہے $(\pi,2\pi)$ میں اور

(c) نہ تو بڑھ رہا ہے اور نہ ہی گھٹ رہا ہے $(0,2\pi)$

حل نوٹ کر لیجیے کہ $f'(x) = -\sin x$

(a) کیونکہ ہر ایک $x \in (0, \pi)$ کے لیے $\sin x > 0$، ہمارے پاس ہے $f'(x) < 0$ اور اس لیے f کم ہو رہا ہے $(0, \pi)$

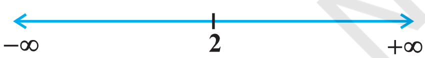
(b) کیونکہ ہر ایک $x \in (\pi,2\pi)$ کے لیے $\sin x < 0$، ہمارے پاس ہے $f'(x) > 0$ اور اس لیے f بڑھ رہا ہے $(\pi, 2\pi)$

(c) صاف طور پر اوپر کے (a) اور (b) سے، f نہ تو بڑھ رہا ہے اور نا ہی کم ہو رہا ہے $(0, 2\pi)$ میں۔

مثال 10 وہ وقفہ معلوم کیجیے جن میں فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے $f(x) = x^2 - 4x + 6$ سے

(a) بڑھ رہا ہے۔ (b) کم ہو رہا ہے

حل ہمارے پاس ہے۔



شکل 6.3

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

یا
$$f'(x) = 2x - 4$$

اس لیے $f'(x) = 0$ دیتا ہے $x = 2$، اب نقطہ $x = 2$ حقیقی خط کو دو مختلف وقفوں میں بانٹتا ہے جن کے نام، $(-\infty, 2)$ اور $(2,\infty)$ ہیں (شکل 6.3) وقفہ $(-\infty, 2)$ میں $f'(x) = 2x - 4 < 0$ ہے۔

اس لیے، اس وقفہ میں f کم ہو رہا ہے۔ ساتھ ہی، وقفہ $(2,\infty)$ میں $f'(x) > 0$ ہے۔ اور اس لیے فنکشن f بڑھ رہا ہے۔

مثال 11 وہ وقفے معلوم کیجیے جن میں فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے، $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ سے (a) بڑھ رہا ہے

(b) گھٹ رہا ہے۔

حل ہمارے پاس ہے

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$$

$$f'(x) = 12x^2 - 12x - 72$$

$$= 12(x^2 - x - 6)$$

$$= 12(x-3)(x+2)$$

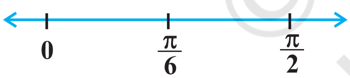
شکل 6.4

اس لیے $f'(x) = 0$ دیتا ہے $x = -2, 3$ نقاط $x = -2$ اور $x = 3$ حقیقی خط کو تین مختلف وقفوں میں بانٹتے ہیں، جن کے نام ہیں $(-\infty, -2)$، $(-2, 3)$ اور $(3, \infty)$

$(-\infty, -2)$ اور $(3, \infty)$ وقفوں میں $f'(x)$ مثبت ہے جب کہ وقفہ $(-2, 3)$ میں $f'(x)$ منفی ہے۔ نتیجتاً فنکشن f وقفوں $(-\infty, -2)$ اور $(3, \infty)$ میں بڑھ رہا ہے جب کہ فنکشن وقفہ $(-2, 3)$ میں کم ہو رہا ہے۔ حالانکہ R میں فنکشن نہ تو بڑھ رہا ہے اور نہ ہی گھٹ رہا ہے۔

وقفہ	$f'(x)$ کا نشان	تفاعل f کا مزاج
$(-\infty, -2)$	$(-)(-)>0$	f بڑھ رہا ہے
$(-2, 3)$	$(-)(+)<0$	f کم ہو رہا ہے
$(3, \infty)$	$(+)(+)>0$	f بڑھ رہا ہے

مثال 12 وہ وقفہ معلوم کیجیے جن میں فنکشن جو کہ دیا گیا ہے $f(x) = \sin 3x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ سے (a) بڑھ رہا ہے (b) گھٹ رہا ہے۔



شکل 6.5

حل ہمارے پاس ہے

$$f(x) = \sin 3x$$

یا

$$f'(x) = 3\cos 3x$$

اس لیے $f'(x) = 0$ دیتا ہے $\cos 3x = 0$ جو کہ پلٹ میں دیتا ہے $3x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ کیونکہ $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ کا مطلب ہے $3x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$، تاکہ $x = \frac{\pi}{6}$ اور $x = \frac{\pi}{2}$ ہے۔ نقطہ $x = \frac{\pi}{6}$ وقفہ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ کو دو مشترک وقفوں $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ اور $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ میں بانٹتا ہے۔

اب $f'(x)>0$ تمام $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right)$ کے لیے کیونکہ $0\le x<\frac{\pi}{6}\Rightarrow 0\le 3x<\frac{\pi}{2}$ اور $f'(x)<0$ تمام $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ کے لیے، کیونکہ $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{2}<3x<\frac{3\pi}{2}$ ہے۔

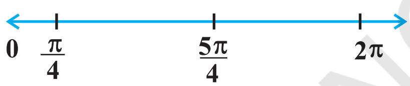
اس لیے f $\left[0,\frac{\pi}{6}\right)$ میں بڑھ رہا ہے اور $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ میں کم ہو رہا ہے۔

ساتھ ہی دیا ہوا فنکشن $x=0$ اور $x=\frac{\pi}{6}$ میں مسلسل ہے۔ اس لیے، مسئلہ 1 سے f $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ میں بڑھ رہا ہے اور $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ میں کم ہو رہا ہے۔

مثال 13 وہ وقفہ دریافت کیجیے جس میں فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے۔

$$f(x)=\sin x+\cos x,\ 0\le x\le 2\pi$$

بڑھ رہا ہے یا کم ہو رہا ہے



شکل 6.6

حل ہمارے پاس ہے

$$f(x)=\sin x+\cos x,$$

یا

$$f'(x)=\cos x-\sin x$$

اب $f'(x)=0$ دیتا ہے $\sin x=\cos x$، جو کہ دیتا ہے $x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$، کیونکہ $0\le x\le 2\pi$ ہے نقاط $x=\frac{\pi}{4}$ اور $x=\frac{5\pi}{4}$ وقفہ $[0, 2\pi]$ کو تین غیر مشترک وقفوں میں بانٹتے ہیں، جن کے نام ہیں $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$، $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ اور $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ میں

یہ نوٹ کر لیجیے کہ $f'(x)>0$ اگر $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$

یا f وقفوں $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$ اور $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ میں بڑھ رہا ہے۔

ساتھ ہی $f'(x) < 0$ اگر $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

یا f $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ میں گھٹ رہا ہے۔

تفاعل کا مزاج	$f'(x)$ کی علامت	وقفہ
f بڑھ رہا ہے	>0	$\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$
f گھٹ رہا ہے	<0	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$
f بڑھ رہا ہے	>0	$\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$

مشق 6.2

1۔ دکھائیے کہ فنکشن جو کہ دیا گیا ہے $f(x) = 3x + 17$ سے **R** میں بڑھ رہا ہے۔

2۔ دکھائیے کہ فنکشن جو کہ دیا گیا ہے $f(x) = e^{2x}$ سے **R** میں بڑھ رہا ہے۔

3۔ دکھائیے کہ فنکشن جو کہ دیا گیا ہے $f(x) = \sin x$ سے

(a) بڑھ رہا ہے $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ میں (b) کم ہو رہا ہے $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ میں

(c) $(0, \pi)$ میں نہ تو بڑھ رہا ہے اور نہ ہی گھٹ رہا ہے۔

4۔ وہ وقفہ معلوم کیجیے جس میں فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے $f(x) = 2x^2 - 3x$ سے

(a) بڑھ رہا ہے (b) گھٹ رہا ہے۔

5۔ وہ وقفہ معلوم کیجیے جس میں فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ سے

(a) بڑھ رہا ہے (b) کم ہو رہا ہے۔

6۔ وہ وقفہ معلوم کیجیے جن میں ذیل فنکشن یا تو سختی سے بڑھ رہے ہیں یا کم ہو رہے ہیں۔

(a) $x^2 + 2x - 5$ (b) $10 - 6x - 2x^2$

(c) $-2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$ (d) $6 - 9x - x^2$

(e) $(x+1)3\ (x-3)^3$

7۔ دکھایئے کہ $y=\log(1+x)-\dfrac{2x}{2+x}$ اپنے پورے علاقے میں x کا بڑھتا ہوا فنکشن ہے۔

8۔ x کی وہ قدر معلوم کیجیے جس کے لیے $y=[x(x-2)]^2$ ایک بڑھتا ہوا فنکشن ہے۔

9۔ ثابت کیجیے کہ $y=\dfrac{4\sin\theta}{(2+\cos\theta)}-\theta$، θ کا $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ میں ایک بڑھتا ہوا فنکشن ہے۔

10۔ ثابت کیجیے کہ لوگارتمی فنکشن $(0,\infty)$ میں سختی سے بڑھ رہا ہے۔

11۔ ثابت کیجیے کہ فنکشن جو کہ دیا گیا ہے $f(x)=x^2-x+1$ سے $(-1,1)$ پر نہ تو بڑھ رہا ہے اور نہ ہی گھٹ رہا ہے۔

12۔ ذیل میں کون سے فنکشن $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ پر کم ہو رہے ہیں؟

(A) $\cos x$ (B) $\cos 2x$ (C) $\cos 3x$ (D) $\tan x$

13۔ ذیل میں کون سے وقفوں پر فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے $f(x)=x^{100}+\sin x-1$ سے گھٹ رہا ہے؟

(A) $(0,1)$ (B) $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ (C) $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ (D) ان میں سے کوئی بھی نہیں

14۔ a کی کس قدر کے لیے تفاعل f جو کہ دیا گیا ہے $f(x)=x^2+ax+1$ وقفہ $(1,2)$ پر بڑھ رہا ہے؟

15۔ مان لیجیے I ایک وقفہ ہے جو کہ $(-1,1)$ کے علاوہ ہے۔ ثابت کیجیے کہ فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ سے سختی سے I پر بڑھ رہا ہے۔

16۔ ثابت کیجیے کہ فنکشن f جو کہ $f(x)=\log\sin x$ سے دیا گیا ہے $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ پر بڑھ رہا ہے اور $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ پر کم ہو رہا ہے۔

17۔ ثابت کیجیے کہ فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے $f(x)=\log\cos x$ سے $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ پر کم ہو رہا ہے اور $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ پر بڑھ رہا ہے۔

18۔ ثابت کیجیے کہ فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے $f(x)=x^3-3x^2+3x-100$ ، **R** میں بڑھ رہا ہے۔

19۔ وہ وقفہ جس میں $y=x^2e^{-x}$ ہے بڑھ رہا ہے۔

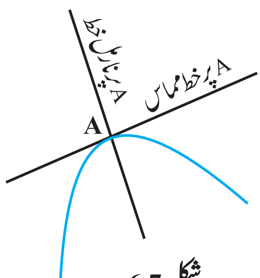
(A) $(-\infty,\infty)$ (B) $(-2,0)$ (C) $(2,\infty)$ (D) $(0,2)$

6.4 مماس اور نارمل

اس سیکشن میں ہم تفرق کا استعمال منحنی کے ایک دیے ہوئے نقطے پر مماس خط اور نارمل خط کی مساوات معلوم کرنے کے لیے کریں گے۔

اسے یاد کیجیے کہ ایک سیدھے خط کی مساوات جس کا سلوپ m ہے اور جو کہ دیئے ہوئے نقطے (x_0, y_0) سے گزر رہی ہے اور دی ہوئی ہے۔

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$



شکل 6.7

یہ نوٹ کر لیجیے کہ مماس کا سلوپ منحنی $y = f(x)$ کے ایک نقطے (x_0, y_0) پر اس سے دیا گیا ہے $\left.\dfrac{dy}{dx}\right]_{(x_0, y_0)} (= f'(x_0))$۔ اس طرح مماس کی مساوات کی $y = f(x)$ کے لیے (x_0, y_0) پر اس طرح دی گئی ہے۔

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

ساتھ ہی کیونکہ نارمل مماس پر عمود ہے، نارمل کا سلوپ منحنی $y = f(x)$ کے نقطہ (x_0, y_0) پر دیا گیا ہے $\dfrac{-1}{f'(x_0)}$ سے، $f'(x_0) \neq 0$ ہے۔ اس لیے نارمل کی مساوات منحنی $y = f(x)$ کے نقطہ (x_0, y_0) پر اس طرح دی گئی ہے۔

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

یعنی

$$(y - y_0) f'(x_0) + (x - x_0) = 0$$

> **نوٹ** اگر ایک مماس خط منحنی $y = f(x)$ پر x-axis کے ساتھ مثبت سمت میں یعنی θ کا زاویہ بناتا ہے، تب $\dfrac{dy}{dx} =$ مماس کا سلوپ $= \tan\theta$

خاص مرحلے (کیس)

(i) اگر مماس خط کا سلوپ صفر ہے، تب $\tan\theta = 0$، اور اس لیے $\theta = 0$ ہے جس کا مطلب ہے مماس خط x-axis (محور) کے متوازی ہے اس کیس میں، مماس کی مساوات نقطہ (x_0, y_0) پر $y = y_0$ سے دی گئی ہے۔

(ii) اگر $\theta \to \dfrac{\pi}{2}$ ہے، تب $\theta \to \infty$ جس کا مطلب ہے مماس خط x-محور پر عمود ہے، یعنی y-محور کے متوازی ہے۔

اس کیس میں مماس کی مساوات (x_0, y_0) پر $(x = x_0)$ سے دی گئی ہے (کیوں)۔

مثال 14 مماس کا سلوپ منحنی $y = x^3 - x$ کے لیے نقطہ $x = 2$ پر معلوم کیجیے۔

حل مماس کا سلوپ $x=2$ پر دیا گیا ہے۔

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} = 3x^2 - 1\Big]_{x=2} = 11.$$

مثال 15 وہ نقطہ معلوم کیجیے جس پر منحنی $y = \sqrt{4x-3} - 1$ پر مماس کا سلوپ $\frac{2}{3}$ ہے۔

حل نقطہ (x, y) پر دی ہوئی منحنی کا سلوپ ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(4x-3)^{\frac{-1}{2}}4 = \frac{2}{\sqrt{4x-3}}$$

سلوپ دیا ہوگا $\frac{2}{3}$

اس لیے $$\frac{2}{\sqrt{4x-3}} = \frac{2}{3}$$

یا $$4x - 3 = 9$$

یا $$x = 3$$

اب $y = \sqrt{4x-3} - 1$ ہے، اس لیے $x = 3$، $y = \sqrt{4(3)-3} - 1 = 2$ ہے۔

اس لیے مطلوبہ نقطہ $(3,2)$ ہے۔

مثال 16 ان تمام خطوط کی مساواتیں معلوم کیجیے جن کا سلوپ 2 ہے اور جو منحنی $y + \frac{2}{x-3} = 0$ پر مماس ہیں۔

حل دیے ہوئے نقطہ (x,y) پر دی ہوئی منحنی کا سلوپ اس طرح دیا گیا ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x-3)^2}$$

لیکن سلوپ 2 دیا ہوگا۔ اس لیے

$$\frac{2}{(x-3)^2}=2$$

یا $(x-3)^2=1$

یا $x-3=\pm 1$

یا $x=2, 4$

اب $x = 2$، $y = 2$ دیتا ہے، اس طرح سلوپ 2 کے ساتھ دو مماس میں دیئے ہوئی منحنی کے لیے اور نقاط (2,2) اور (4,–2) سے گزر رہا ہے۔ مماس کی مساوات جو (2,2) سے ہوکر گزر رہی ہے یہ ہے

$$y-2=2(x-2)$$

یا $y-2x+2=0$

اور مماس کی مساوات (4,–2) سے ہوکر گزر رہی ہے، دیا ہوا ہے $y-(-2)=L(x-4)$

یا $y-2x+10=0$

مثال 17 منحنی $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ پر نقاط معلوم کیجیے جہاں مماس (i) x– محور کے متوازی ہے (ii) y– محور کے متوازی ہے۔

حل x کو مدنظر رکھتے ہوئے $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ کا تفرق کیجیے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{x}{2}+\frac{2y}{25}\frac{dy}{dx}=0$$

یا $\frac{dy}{dx}=\frac{-25}{4}\frac{x}{y}$

(i) اب مماس x– محور کے متوازی ہے اگر مماس کا سلوپ صفر ہے جو دیتا ہے $\frac{-25}{4}\frac{x}{y}=0$ یہ ممکن ہے اگر $x=0$ ہے۔
تب $x=0$ کے لیے $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ ہے جو دیتا ہے $y^2=25$ یعنی $y=\pm 5$
اس طرح، وہ نقاط جن پر مماس x– محور کے متوازی ہیں (0,5) اور (0,–5)

(ii) اگر نارمل کا سلوپ 0 ہے تو مماس خط y– محور کے متوازی ہے جو دیتا ہے $\frac{4y}{25x}=0$ یعنی $y=0$ اس لیے، $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ ہے، $y=0$ کے لیے جو دیتا ہے $x=\pm 2$۔ اس طرح وہ نقاط جن پر مماس y– محور کے متوازی ہیں (2,0) اور (–2,0) ہے۔

مثال 18 مماس کی مساوات منحنی $y = \dfrac{x-7}{(x-2)(x-3)}$ کے لیے معلوم کیجیے، جہاں یہ x– محور کو کاٹتا ہے۔

حل نوٹ کیجیے کہ x– محور پر، $y = 0$ ہے اس لیے منحنی کی مساوات جب کہ $y = 0$ ہے، $x = 7$ دیتا ہے۔ اس لیے منحنی x– محور کو $(7,0)$ پر کاٹتا ہے۔ اب x کو مدنظر رکھتے ہوئے مساوات کا تفرق کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-y(2x-5)}{(x-2)(x-3)} \qquad \text{(کیوں؟)}$$

یا

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(7,0)} = \frac{1-0}{(5)(4)} = \frac{1}{20}$$

اس لیے مماس کا اسلوب $(7,0)$ پر $\dfrac{1}{20}$ ہے۔ اس طرح مماس کی مساوات نقطہ $(7,0)$ پر ہے۔

$$y - 0 = \frac{1}{20}(x-7) \qquad \text{یا} \qquad 20y - x + 7 = 0$$

مثال 19 مماس اور نارمل کی مساواتیں منحنی $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2$ کے لیے $(1,1)$ پر معلوم کیجیے۔

حل $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2$ کی x کی مناسبت سے تفرق کیجیے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} + \frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

اس لیے مماس کا سلوپ $(1,1)$ پر ہے $\left.\dfrac{dy}{dx}\right]_{(1,1)} = -1$

اس طرح مماس کی مساوات $(1,1)$ پر دی گئی ہے۔

$$y - 1 = -1\,(x-1) \qquad \text{یا} \qquad y + x - 2 = 0$$

ساتھ کی $\dfrac{-1}{(1,1)\text{ پر مماس کا سلوپ}} = 1$ نارمل کا سلوپ $(1,1)$ پر دی گئی ہے۔

اس لیے نارمل کی مساوات $(1,1)$ پر ہے۔

$$y - 1 = 1\,(x-1) \qquad \text{یا} \qquad y - x = 0$$

مثال 20 مماس کی مساوات دی ہوئی منحنی کے لیے دریافت کیجیے جو کہ دی گئی ہے۔

$$x = a\sin^3 t \qquad y = b\cos^3 t \qquad (1)...$$

اس نقطہ پر جہاں $t = \frac{\pi}{2}$ ہو۔

حل (1) کو t کی مناسبت سے تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{dx}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t \quad \text{اور} \quad \frac{dy}{dt} = -3b\cos^2 t\sin t$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3b\cos^2 t\sin t}{3a\sin^2 t\cos t} = \frac{-b\cos t}{a\sin t}$$

اس لیے مماس کا $t = \frac{\pi}{2}$ پر سلوپ ہے

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-b\cos\frac{\pi}{2}}{a\sin\frac{\pi}{2}} = 0$$

ساتھ ہی جب کہ $t = \frac{\pi}{2}$، $x = a$ اور $y = 0$ ہے۔ اس لیے مماس کی مساوات دی ہوئی $t = \frac{\pi}{2}$ یعنی $(a,0)$ پر مماس کی مساوات ہے

$$y - 0 = 0(x - a), \text{ یعنی } y = 0$$

مشق 6.3

1۔ منحنی $y = 3x^4 - 4x$ کے نقطہ $x = 4$ پر مماس کا سلوپ معلوم کیجیے۔

2۔ منحنی $y = \frac{x-1}{x-2}, \ x \neq 2$ کے نقطہ $x = 10$ پر مماس کا سلوپ معلوم کیجیے۔

3۔ منحنی $y = x^3 - x + 1$ کے اس نقطہ پر جس کا x- مختص 2 ہے پر مماس کا سلوپ معلوم کیجیے۔

4۔ منحنی $y = x^3 - 3x + 2$ کے اس نقطہ پر جس کا x- مختص 3 ہے۔ پر مماس کا سلوپ معلوم کیجیے۔

5۔ منحنی $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$ کے نقطہ $\theta = \frac{\pi}{4}$ پر نارمل کا سلوپ معلوم کیجیے۔

6۔ وہ منحنی $x = 1 - a\sin\theta,\ y = b\cos^2\theta$ کے نقطہ $\theta = \frac{\pi}{2}$ پر نارمل کا سلوپ معلوم کیجیے۔

7۔ وہ نقاط معلوم کیجیے جن پر منحنی $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ کا مماس x–محور کے متوازی ہے۔

8۔ منحنی $y=(x-2)^2$ پر ایک نقطہ معلوم کیجیے جس پر مماس اس قوسی وتر کے متوازی ہے جو نقاط $(2,0)$ اور $(4,4)$ سے مل کر بنا ہے۔

9۔ منحنی $y = x^3 - 11x + 5$ پر وہ نقطہ معلوم کیجیے جس پر مماس $y = x - 11$ ہے۔

10۔ ان تمام خطوط کی مساوات معلوم کیجیے جن کا سلوپ -1 ہے اور جو کہ منحنی $y = \frac{1}{x-1}$، $x \neq 1$ پر مماس ہے۔

11۔ ان تمام خطوط کی مساوات معلوم کیجیے جن کا سلوپ 2 ہے اور جو کہ منحنی $y = \frac{1}{x-3}$، $x \neq 3$ پر مماس ہے۔

12۔ ان تمام خطوط کی مساوات معلوم کیجیے جن کا سلوپ 0 ہے اور جو کہ مماس $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$ پر مماس ہے۔

13۔ منحنی $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ پر وہ نقطہ معلوم کیجیے جہاں مماس

(i) x–محور کے متوازی ہیں (ii) y–محور کے متوازی ہیں۔

14۔ مماس اور نارمل کی مساواتیں دئے ہوئے منحنی کے سامنے دیے گیے نقطوں پر معلوم کیجیے۔

(i) $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$، $(0,5)$ پر

(ii) $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$، $(1,3)$ پر

(iii) $y = x^3$، $(1,1)$ پر

(iv) $y = x^2$، $(0,0)$ پر

(v) $x = \cos t, y = \sin t$، $t = \frac{\pi}{4}$ پر

15۔ منحنی $y = x^2 - 2x + 7$ کے لیے مماس کی مساوات معلوم کیجیے جو کہ

(a) خط $2x - y + 9 = 0$ پر متوازی ہے

(b) خط $5y - 15x = 13$ پر عمود ہے۔

16۔ دکھایئے کہ مماس، منحنی $y = 7x^3 + 11$ کے ان نقطوں پر جہاں $x = 2$ اور $x = -2$ ہے متوازی ہیں۔

17۔ منحنی $y = x^3$ پر وہ نقاط معلوم کیجیے جہاں مماس کا سلوپ y- مختص کے برابر ہے۔

18۔ منحنی $y = 4x^3 - 2x^5$ کے لیے تمام نقاط معلوم کیجیے جہاں مماس مبدا سے گزر رہا ہے۔

19۔ منحنی $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ پر وہ نقاط معلوم کیجیے جہاں مماس x- مبدا کے متوازی ہے۔

20۔ منحنی $ay^2 = x^3$ کے لیے نارمل کی مساوات نقطہ (am^2, am^3) پر معلوم کیجیے۔

21۔ منحنی $y = x^3 + 2x + 6$ کے لیے نارمل کی مساوات معلوم کیجیے جو کہ خط $x + 14y + 4 = 0$ کے متوازی ہے۔

22۔ مکانی $y^2 = 4ax$ پر نقطہ $(at^2, 2at)$ کے لیے مماس اور نارمل کی مساواتیں معلوم کیجیے۔

23۔ ثابت کیجیے کہ منحنی $x = y^2$ اور $xy = k$ زاویہ قائمہ پر کاٹتے ہیں اگر $8k^2 = 1$ ہے۔

24۔ زائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ کے لیے مماس اور نارمل کی مساواتیں معلوم کیجیے نقطہ (x_0, y_0) پر

25۔ منحنی $y = \sqrt{3x - 2}$ کے لیے مماس کی مساوات معلوم کیجیے جو کہ خط $4x - 2y + 5 = 0$ کے متوازی ہے۔

مشق 26 تا 27 میں صحیح جواب چنیئے

26۔ منحنی $y = 2x^2 + 3\sin x$ کے لیے نقطہ $x = 0$ پر نارمل کا سلوپ ہے۔

(A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$

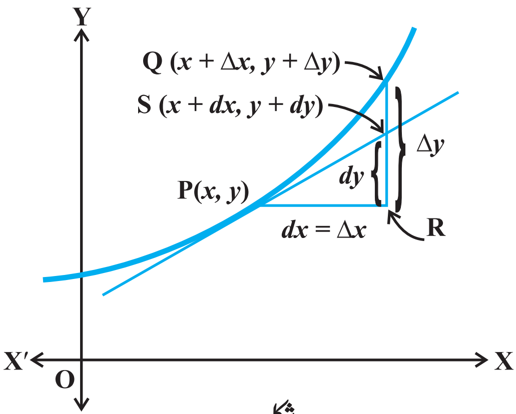
27۔ خط $y = x + 1$ مماس ہے منحنی $y^2 = 4x$ پر نقطہ

(A) (1,2) (B) (2,1) (C) (1,–2) (D) (–1,2)

6.5 تقرب (Approximations)

اس باب میں ہم تفرق کا استعمال کچھ اشیاء کی تفرق قدریں معلوم کرنے کے لیے کریں گے۔

مان لیجیے $f : D \to \mathbf{R}, D \subset \mathbf{R}$، ایک دیا ہوا تفاعل ہے اور مان لیجیے $y = f(x)$ ہے مان لیجیے Δx میں ایک چھوٹے اضافہ کو ظاہر کرتا ہے۔ اسے یاد کیجیے کہ y میں آضافہ x میں اضافہ کے مطابق Δy سے ظاہر کیا گئی ہے۔ جو $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ سے دیا گیا



شکل 6.8

ہے۔ہم ذیل کو بیان کرتے ہیں۔

(i) y کا تفرق dy, سے ظاہر کیا جاتا ہے، جو کہ dx $= \Delta x$ سے بیان کیا گیا ہے۔

(ii) y کا تفرق dy سے ظاہر کیا جاتا ہے، جو کہ $dy = f'(x)dx$ یا $dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x$ سے بیان کیا جاتا ہے۔

اس حال میں جب $dx = \Delta x$ اضافی طور پر چھوٹا ہے x کے ساتھ موازنہ کرنے پر dy، Δy کا اچھا تقرب ہے اور ہم اسے $dy \approx \Delta y$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

$\Delta x, \Delta y, dx$ اور dy کے جیومیٹریائی مطلب کے لیے کوئی شکل 6.8 کا حوالہ دے سکتا ہے۔

نوٹ شکل 6.8 اور اوپر کے بحث ومباحثہ کو مدنظر رکھتے ہوئے ہم یہ نوٹ کر سکتے ہیں کہ تابع متغیر کا تفرق متغیر میں اضافہ کے برابر نہیں ہے جہاں آزاد متغیر کا تفرق، متغیر میں اضافہ کے برابر ہے۔

مثال 21 تفرق کا استعمال کرکے $\sqrt{36.6}$ کا تقرب کرو۔

حل $y = \sqrt{x}$ لیجیے۔ مان لیجیے $x = 36$ اور $\Delta x = 0.6$ ہے۔ تب

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \sqrt{36.6} - \sqrt{36} = \sqrt{36.6} - 6$$

یا

اب dy تقریباً Δy کے برابر ہے جو کہ دی گئی ہے۔

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x}}(0.6) = \frac{1}{2\sqrt{36}}(0.6) = 0.05$$ (کیونکہ $(y = \sqrt{x})$)

اس لیے $\sqrt{36.6}$ کی تقریباً قدر $6 + 0.05 = 6.05$ ہے۔

مثال 22 $(25)^{\frac{1}{3}}$ کی تقریباً قدر معلوم کرنے کے لیے تفرقہ کا استعمال کریں۔

حل مان لیجیے $y = x^{\frac{1}{3}}$ ہے۔ مان لیجیے $x = 27$ اور $\Delta x = -2$ ہے۔ تب

$$\Delta y = (x+\Delta x)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} = (25)^{\frac{1}{3}} - (27)^{\frac{1}{3}} = (25)^{\frac{1}{3}} - 3$$

یا
$$(25)^{\frac{1}{3}} = 3 + \Delta y$$

اب dy تقریباً Δy کے برابر ہے اور دی گئی ہے۔

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}(-2) \qquad (\text{کیونکہ } y = x^{\frac{1}{3}})$$

$$= \frac{1}{3((27)^{\frac{1}{3}})^2}(-2) = \frac{-2}{27} = -0.074$$

اس طرح $(25)^{\frac{1}{3}}$ کی تقریباً قدر $3 + (-0.074) = 2.926$ سے دی گئی ہے۔

مثال 23 $f(3.02)$ کی تقریباً قدر معلوم کیجیے جہاں $f(x) = 3x^2 + 5x + 3$ ہے۔

حل مان لیجیے $x = 3$ اور $\Delta x = 0.02$ ہے۔ تب

$$f(3.02) = f(x+\Delta x) = 3(x+\Delta x)^2 + 5(x+\Delta x) + 3$$

یہ نوٹ کر لیجیے کہ $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ ہے۔ اس لیے

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta y$$

$$\approx f(x) + f'(x)\,\Delta x \qquad (\text{کیونکہ } dx = \Delta x \text{ ہے})$$

یا
$$f(3.02) \approx (3x^2+5x+3) + (6x+5)\,\Delta x$$

$$= (3(3)^2 + 5(3) + 3) + (6(3) + 5)(0.02) \qquad (\text{کیونکہ } x = 3, \Delta x = 0.02 \text{ ہے})$$

$$= (27 + 15 + 3) + (18 + 5)(0.02)$$

$$= 45 + 0.46 = 45.46$$

اس لیے $f(3.02)$ کی تقریباً قدر 45.46 ہے۔

مثال 24 ایک کعب جس کا ضلع x میٹر ہے کے حجم میں تقریباً تبدیلی معلوم کیجیے جو کہ اس کے ضلع میں 2 فیصدی اضافہ سے ہوا ہے۔

حل نوٹ کیجیے کہ

$$V = x^3$$

یا

$$dV = \left(\frac{dV}{dx}\right)\Delta x = (3x^2)\Delta x$$

$= (3x^2)\,(0.02x) = 0.06x^3$ مکعب میٹر (کیونکہ x کا 2%، $0.02x$ ہے)

اس طرح حجم میں تقریب تبدیلی $0.06\,x^3$ مکعب سینٹی میٹر ہے۔

مثال 25 اگر ایک کرہ کا نصف قطر 9 سینٹی میٹر ماپا گیا ہو، غلطی 0.03 سینٹی میٹر کے ساتھ، تب اس کے حجم کا حساب لگانے میں تقریباً غلطی معلوم کیجیے۔

حل مان لیجیے کرہ کا نصف قطر r ہے اور اس کا نصف قطر ماپنے میں غلطی Δx ہے۔ تب $r = 9$ سینٹی میٹر اور $\Delta r = 0.03$ سینٹی میٹر اب کرہ کا حجم V دیا گیا ہے۔

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

یا

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

اس لیے

$$dV = \left(\frac{dV}{dr}\right)\Delta r = (4\pi r^2)\Delta r$$

$= 4\pi(9)^2\ (0.03) = 9.72\pi$ مکعب سینٹی میٹر

اس لیے حجم کا حساب لگانے میں تقریباً قدر 9.27π مکعب سینٹی میٹر ہے۔

مشق 6.4

1۔ تفرقہ کا استعمال کر کے ذیل میں ہر ایک کی تقریباً قدر اعشاریہ کے 3 درجوں تک کو معلوم کیجیے۔

(i) $\sqrt{25.3}$ (ii) $\sqrt{49.5}$ (iii) $\sqrt{0.6}$

(iv) $(0.009)^{\frac{1}{3}}$ (v) $(0.999)^{\frac{1}{10}}$ (vi) $(15)^{\frac{1}{4}}$

(vii) $(26)^{\frac{1}{3}}$ (viii) $(255)^{\frac{1}{4}}$ (ix) $(82)^{\frac{1}{4}}$

(x) $(401)^{\frac{1}{2}}$ (xi) $(0.0037)^{\frac{1}{2}}$ (xii) $(26.57)^{\frac{1}{3}}$

(xiii) $(81.5)^{\frac{1}{4}}$ (xiv) $(3.968)^{\frac{3}{2}}$ (xv) $(32.15)^{\frac{1}{5}}$

2۔ $f(2.01)$ کی تقریباً قدر معلوم کیجیے، جہاں $f(x)=4x^2+5x+2$ ہے۔

3۔ $f(5.001)$ کی تقریباً قدر معلوم کیجیے، جہاں $f(x)=x^3-7x^2+15$ ہے۔

4۔ ایک کعب جس کا ضلع x میٹر ہے کے حجم V کی تقریب میں بدلاؤ معلوم کیجیے جو کہ اس کے ضلع %1 اضافہ سے ہوئی ہے۔

5۔ ایک کعب جس کا ضلع x میٹر ہے کے سطحی رقبہ کی تقریب میں بدلاؤ معلوم کیجیے جو کہ اس کے ضلع میں %1 کے گھٹنے سے ہوئی ہے۔

6۔ اگر ایک کرہ کا نصف قطر 7 میٹر ناپا گیا ہے جس میں 0.02m کی غلطی ہے، تب اس کا حجم کے حساب لگانے میں تقرب غلطی معلوم کیجیے۔

7۔ اگر ایک کرہ کا نصف قطر 9 میٹر ناپا گیا ہے جس میں 0.03m کی غلطی ہے، تب اس کا سطحی رقبہ لگانے میں قریب غلطی معلوم کیجیے۔

8۔ اگر $f(x)=3x^2+15x+5$ ہے، تب $f(3.02)$ کی تقریباً قدر ہے۔

(A) 47.66 (B) 57.66 (C) 67.66 (D) 77.66

9۔ ایک مکعب جس کا ضلع x میٹر ہے اس کے حجم میں اس کا اضلاع %3 بڑھانے سے تقریب جیسا بدلاؤ ہوا ہے وہ اس طرح ہے۔

(A) $0.06\,x^3$ مکعب میٹر (B) $0.6\,x^3$ مکعب میٹر (C) $0.09\,x^3$ مکعب میٹر (D) $0.9\,x^3$ مکعب میٹر

6.6 اعظم قدریں اور قلیل قدریں

اس سیکشن میں ہم مشتق کے تصور کا استعمال مختلف تفاعلات کی اعظم اور قلیل قدریں معلوم کرنے کے لیے کریں گے۔ حقیقت میں ہم ایک تفاعل کے گراف پر نقطۂ عطف معلوم کریں گے اور اس طرح ان نقاط کو معلوم کریں گے جہاں گراف اپنی سب سے اونچے (یا سب سے نیچے) مقام پر ہو۔ اس طرح کے نقاط کا علم تفاعل کا گراف بنانے میں بہت مدد گار ثابت ہوگا۔ اس کے آگے، ہم ایک تفاعل کی عظیم مطلق قدریں اور قلیل قدریں معلوم کریں گے جو کہ بہت سے اطلاقی مسئلوں کو حل کرنے میں

ضروری ہیں۔

ہمیں ذیل مسئلوں پر غور کرنا چاہیے جو ہماری روزمرہ زندگی میں آتے ہیں۔

(i) سنترے کے پیڑوں سے ہوا فائدہ $P(x) = ax + bx^2$ سے دیا گیا ہے، جہاں a,b مستقلہ ہیں اور x ایک ایکڑ میں سنترے کے پیڑوں کی تعداد ہے۔ ایک ایکڑ میں کتنے پیڑ منافع کو اعظم ترین کر سکتے ہیں؟

(ii) ایک گیند کو 60 میٹر اونچی عمارت سے ہوا میں پھینکا گیا ہے، یہ ایک راستے کے ساتھ سفر کرتی ہے جو دیا گیا ہے $h(x) = 60 + x - \frac{x^2}{60}$ سے جہاں x عمارت سے افقی فاصلہ ہے اور $h(x)$ گنبد کی اونچائی ہے۔ گیند زیادہ سے زیادہ کتنی اونچائی تک پہنچے گی؟

(iii) دشمن کا ایک اپاچی ہیلی کاپٹر منحنی $f(x) = x^2 + 7$ کے دیئے ہوئے راستے کے ساتھ اڑ رہا ہے۔ ایک سپاہی جو کہ نقطہ (1,2) پر تعینات ہے اسے مارنا چاہتا ہے جب کہ یہ اس کے سب سے قریب ہو۔ قریب سے قریب فاصلہ کیا ہوگا؟

اوپر کے ہر ایک مسئلہ میں کچھ مشترک ہے، یعنی، ہم دیے ہوئے فنکشن کی اعظم یا قلیل قدریں معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ اس طرح کے مسئلوں سے حل کرنے کے لیے، ہم پہلے ایک فنکشن کی اعظم اور قلیل قدروں کو اچھے طریقے سے بیان کریں گے، اعظم قدروں اور قلیل قدروں کے علاقائی نقاط اور اس طرح کے نقاط معلوم کرنے کے لیے طریقے۔

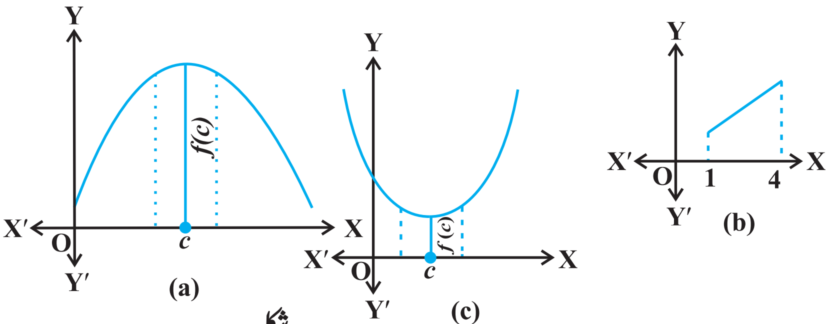
تعریف 3 مان لیجیے f ایک تفاعل ہے جو وقفہ I پر معرف ہے۔ تب

(a) f کی I میں اعظم قدر ہوگی، اگر I میں ایک نقطہ C موجود ہے اس طرح کہ $f(c) \geq f(x)$، تمام $x \in I$ کے لیے۔
عدد $f(c)$، f کی I میں اعظم قدر کہلاتی ہے اور نقطہ C، f کا I میں اعظم قدر والا نقطہ کہلاتا ہے۔

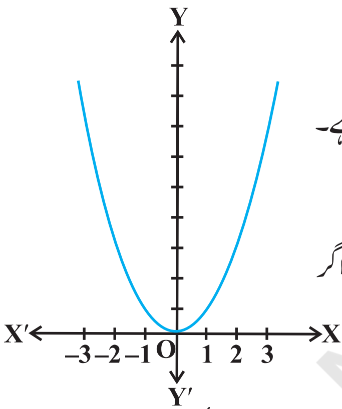
(b) f کی I میں قلیل قدر ہوگی، اگر I میں ایک نقطہ C موجود ہے تا کہ $f(c) \leq f(x)$ ہے، تمام $x \in I$ کے لیے۔
عدد $f(c)$، f کی I قلیل قدر کہلاتی ہے اور نقطہ C، f کا I میں قلیل قدر والا نقطہ کہلاتا ہے۔

(c) f کی I میں انتہائی قدر ہوگی، اگر I میں ایک نقطہ C موجود ہے تا کہ I میں f کی $f(c)$ یا تو عظیم قدر ہے یا قلیل قدر ہے۔
اس کیس میں عدد $f(c)$، f کی I میں انتہائی قدر کہلاتی ہے اور نقطہ C انتہائی نقطہ کہلاتا ہے۔

ریمارک شکل (a)6.9، (b) اور (c) میں ہم نے یہ دکھایا ہے کہ کچھ خاص تفاعلات کے گراف ایک نقطہ پر اعظم قدریں اور قلیل قدریں معلوم کرنے میں ہماری مدد کرتے ہیں۔ حقیقت میں، گراف کے ذریعہ ایک تفاعل کی ہم اعظم قدر، قلیل قدریں بھی



شکل 6.9



شکل 6.10

معلوم کر سکتے ہیں ایک نقطہ پر جہاں تفاعل تفرق پذیر بھی نہیں ہے (مثال 27)۔

مثال 26 تفاعل f کی اعظم قدریں اور قلیل قدریں معلوم کیجیے، اگر ہیں، جو کہ دیا گیا ہے۔

$$f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$$

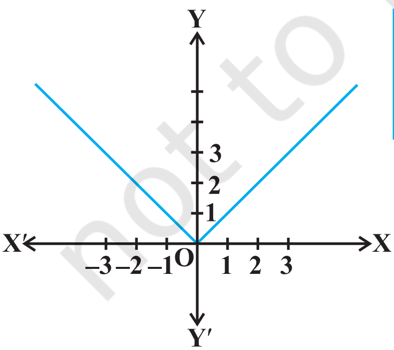
حل دیے ہوئے فنکشن کے گراف سے (شکل 6.10)، ہمارے پاس ہے $f(x) = 0$، اگر

$x = 0$ ہے ساتھ ہی

$f(x) \geq 0$ تمام $x \in \mathbf{R}$ کے لیے

اس لیے f کی قلیل قدر 0 ہے اور f کی قلیل قدر کا نقطہ $x = 0$ ہے۔ اس کے بعد گراف سے اس کا مشاہدہ کیا جا سکتا ہے کہ f کی کوئی عظیم قدر نہیں ہے اور اس لیے f کا کوئی بھی نقطہ **R** میں عظیم قدر نہیں رکھتا۔

نوٹ اگر ہم f کے علاقہ کو $[-2,1]$ تک محدود رکھیں، تب ہی f کی اعظم قدر رکھے گا $(-2)^2 = 4$، $x = 2$ پر



شکل 6.11

مثال 27 f کی عظیم اور قلیل قدریں معلوم کیجیے، اگر کوئی ہیں، جو فنکشن دیا گیا ہے وہ ہے $f(x) = |x|, x \in \mathbf{R}$

حل دیے ہوئے فنکشن کے گراف سے (شکل 6.11) نوٹ کیجیے،

$f(x) \geq 0$، تمام $x \in \mathbf{R}$ اور $f(x) = 0$ کے لیے اگر $x = 0$ ہے۔

اس لیے فنکشن f قلیل قدر 0 رکھتا ہے اور f کا قلیل قدر کا نقطہ $x = 0$ ہے۔ ساتھ ہی گراف صاف طور سے دکھاتا ہے کہ f کی R میں عظیم قدر نہیں ہے اور اس لئے R میں عظیم قدر کا کوئی نقطہ نہیں ہے۔

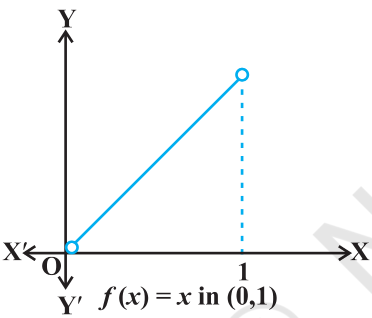
نوٹ

(i) اگر ہم f کا علاقہ صرف $[-2,1]$ تک محدود کریں، تب f کی اعظم قدر ہوگی $|-2| = 2$

(ii) یہ نوٹ کیا جاسکتا ہے کہ مثال 27 میں فنکشن f، $x = 0$ پر تفرق پذیر نہیں ہے۔

مثال 28 فنکشن $f(x) = x, x \in (0, 1)$ کی عظیم اور قلیل قدریں معلوم کیجیے، اگر کوئی ہیں۔

حل دیا ہوا فنکشن ایک بڑھتا ہوا (منحنی سے) فنکشن ہے دیے ہوئے وقفہ (علاقہ) $(0, 1)$ میں فنکشن f کے گراف (شکل 6.12) سے، اس کی قلیل قدر 0 کے قریب نقطہ پر ہونی چاہیے اپنے دائیں طرف اور عظیم قدر کے قریب نقطہ پر اپنے بائیں طرف۔ کیا اس طرح کے نقاط موجود ہیں؟ بالکل نہیں، ایسے نقاط کا دیکھنا (تلاش) کرنا ممکن نہیں ہے۔ حقیقت میں اگر ایک نقطہ x_0، 0 کے سب سے قریب ہے، تب ہم نکالتے ہیں $\frac{x_0}{2} < x_0$ تمام $x_0 \in (0,1)$ کے لیے



شکل 6.12

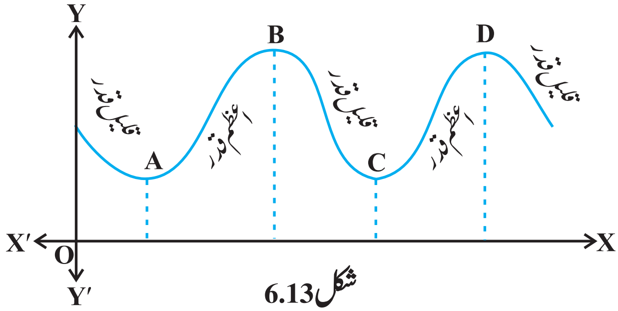
اس لیے دیا ہوا فنکشن $(0,1)$ میں نہ تو عظیم قدر رکھتا ہے اور نہ ہی قلیل قدر

ریمارک پڑھنے والا مثال 28 میں یہ مشاہدہ کرسکتا ہے کہ، اگر ہم f کے علاقہ میں 0 اور 1 شامل کرلیں، یعنی، اگر ہم f کے علاقہ کو $[0,1]$ تک بڑھادیں تب فنکشن f، $x = 0$ پر قلیل قدر رکھتا ہے اور عظیم قدر 1، $x = 1$ پر رکھتا ہے، حقیقت میں ہمارے پاس ذیل نتائج ہیں (ان نتائج کے ثبوت اس کتاب کی پہنچ سے باہر ہیں)

ہر ایک یک رنگ تفاعل اپنی عظیم قدریں/قلیل قدریں اپنے علاقہ کے سرے کے نقاط پر ہوتی ہیں۔ ایک اور زیادہ عام نتیجہ ہے۔

ہر ایک مسلسل فنکشن ایک بند وقفہ پر عظیم قدر اور قلیل قدر رکھتا ہے۔

نوٹ یک رنگ تفاعل f سے وقفہ I میں سے ہمارا مطلب ہوتا ہے کہ یا تو f، I میں بڑھ رہا ہے یا I میں گھٹ رہا ہے۔



شکل 6.13

ایک فنکشن کی عظیم اور قلیل قدریں ایک بند وقفہ پر اس سیکشن میں بعد میں زیر بحث ہوں گی۔

اب ہمیں ایک فنکشن کے گراف پر شکل 6.13 میں جانچ کرنی چاہیے۔ گراف کے نقاط A, B, C اور D پر غور کیجیے، فنکشن اپنا انداز گھٹنے سے بڑھنے کی طرف اور اس کے برعکس بدلتا ہے۔ ان نقاط کو دیے ہوئے فنکشن کا بدلتا ہوا نقطہ کہتے ہیں۔ اس کے آگے، مشاہدہ کیجیے کہ نقطہ بدل پر، گراف یا تو ذرا سی اونچی پہاڑی بناتا ہے یا ذرا سی کھائی۔ سادہ انداز میں، فنکشن کی کسی پڑوس (وقفہ) میں قلیل قدر ہے (ایک نقطے A اور C کے اساس کی اپنی جھیل میں۔ اسی طرح فنکشن کی کسی پڑوس (وقفہ) میں نقاط B اور D پر جو کہ اپنی پہاڑی کی چوٹی پر ہیں۔ اسی وجہ کے لیے نقاط A اور C کو مقامی قلیل قدریں کہا جا سکتا ہے (یا نسبتاً قلیل قدریں) اور نقاط B اور D کو مقامی عظیم قدریں (یا نسبتاً عظیم قدریں) فنکشن کے لیے کہا جاتا ہے۔ فنکشن کی مقامی عظیم قدروں یا مقامی قلیل قدروں کو باالترتیب مقامی عظیم یا مقامی قلیل کہا جاتا ہے۔

اب ہم اصولی طور پر مندرجہ ذیل تعریفیں دیں گے۔

تعریف 4 مان لیجیے f ایک حقیقی قدر والا فنکشن اور f کے علاقہ میں c ایک اندرونی نقطہ ہے۔ تب

(a) c مقامی عظیم قدر کا نقطہ کہلاتی ہے اگر کوئی $h > 0$ ہے تاکہ

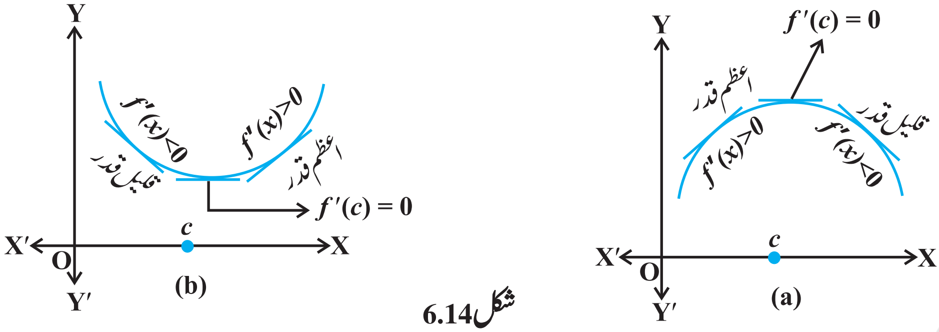
$f(c) \geq f(x)$ تمام $x \in (c - h, c + h)$ کے لیے

قدر $f(c)$ کو فنکشن f کی مقامی عظیم قدر کہا جاتا ہے۔

(b) c مقامی قدر کا نقطہ کہلاتی ہے اگر کوئی $h > 0$ ہے، تاکہ

$f(c) \leq f(x)$، تمام x، $(c - h, c + h)$ کے لیے

قدر $f(c)$ کو فنکشن f کی مقامی قدر کہلاتا ہے۔



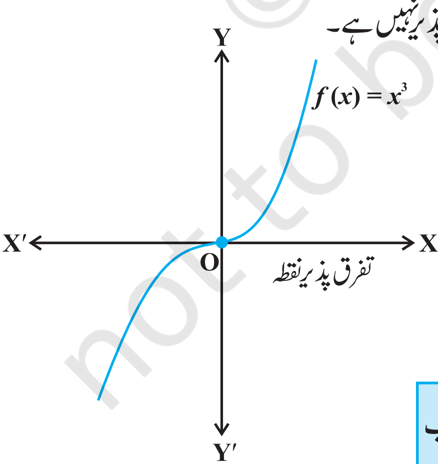
شکل 6.14

جیومیٹریائی انداز میں، اوپر کی تعریف بیان کرتی ہے کہ اگر f کی مقامی عظیم قدر پر ایک نقطہ $x = c$ ہے، تب f کا گراف c کے اردگرد شکل (a)6.14 میں دکھایا گیا ہے۔ یہ نوٹ کر لیجیے کہ فنکشن f وقفہ $(c-h, c)$ میں بڑھ رہا ہے (یعنی $f'(x)>0$) اور وقفہ $(c, c+h)$ میں کم ہو رہا ہے (یعنی $f'(x) < 0$)

یہ بتاتا ہے کہ $f'(c)$ صفر ہونا ہی چاہیے۔

اس طرح اگر f کے مقامی قلیل قدر کا C ایک نقطہ ہے، تب f کا گراف c کے اردگرد شکل (b)6.14 میں دکھایا جائے گا۔ یہاں f وقفہ $(c-h, c)$ میں گھٹ رہا ہے (یعنی $f'(x) < 0$) اور وقفہ $(c, c+h)$ میں بڑھ رہا ہے (یعنی $f'(x) > 0$) یہ دوبارہ بتاتا ہے کہ $f'(c)$، صفر ہونا ہی چاہیے۔

مسئلہ 2 مان لیجیے f ایک فنکشن ہے جو کہ کھلے وقفہ I پر بیان کیا گیا ہے۔ مان لیجیے $c \in$ I ایک کوئی بھی نقطہ ہے۔ اگر $x = c$ پر f مقامی عظیم قدر یا مقامی قلیل قدر رکھتا ہے، تب یا تو $f'(c) = 0$ یا f پر تفرق پذیر نہیں ہے۔



شکل 6.15

ریمارک اوپر دیے ہوئے مسئلہ کا معکوس ضروری نہیں ہے کہ صحیح ہی ہو، وہ یہ ہے، ایک نقطہ جس پر مشتق ختم ہو جائے ضروری نہیں ہے کہ مقامی عظیم قدر یا مقامی قلیل قدر ہو۔ مثال کے طور پر اگر $f(x) = x^3$ ہے، تب $f'(x) = 3x^2$ اور اس طرح $f'(0) = 0$ ہے، لیکن 0 نہ تو مقامی عظیم قدر کا نقطہ ہے اور نہ ہی قلیل قدر کا نقطہ ہے (شکل 6.15)

نوٹ تفاعل f کے علاقہ میں ایک نقطہ c جو کہ $f'(c) = 0$ ہے تب ایک $h > 0$ موجود ہے تا کہ f وقفہ $(c-h, c+h)$ میں تفرق پذیر ہے۔

اب ہم مقامی عظیم قدریں یا مقامی قلیل قدریں کے لیے نقاط معلوم کرنے کا ایک کام کرنے والا اصول دیں گے جس میں صرف پہلی ترتیب کا مشتق ہی استعمال ہوگا۔

مسئلہ 3 پہلی مشتق جانچ (First Derivative Test) مان لیجیے f ایک فنکشن ہے جو کہ کھلے ہوئے وقفہ I پر بیان کیا گیا ہے۔ مان لیجیے I میں فاصل نقطہ c پر f مسلسل ہے۔ تب

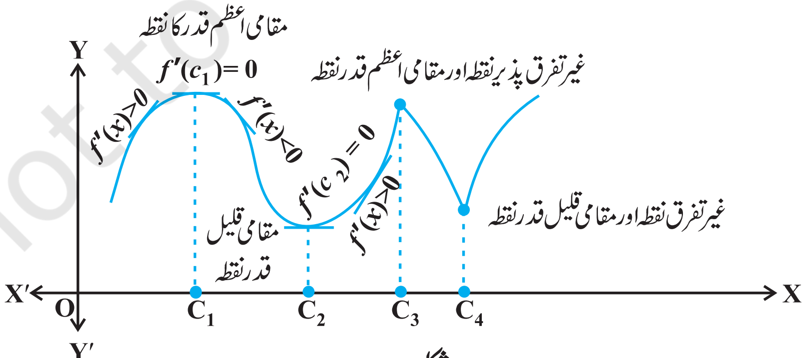
(i) اگر $f'(x)$ کا نشان مثبت سے منفی میں بدل جاتا ہے جیسے جیسے x، c سے ہوتے ہوئے آگے بڑھتا ہے، یعنی، اگر $f'(x) > 0$ سے ہر ایک نقطہ پر جو کہ c سے بائیں یا اس کے بہت قریب ہے، اور $f'(x) < 0$ سے ہر ایک نقطہ پر جو کہ c سے دائیں یا اس کے بہت قریب ہے، تب c ایک مقامی عظیم قدروں والا نقطہ ہے۔

(ii) اگر $f'(x)$ اپنا نشان منفی سے مثبت میں بدلتا ہے جیسے جیسے x، c سے ہوتے ہوئے آگے بڑھتا ہے، یعنی، اگر $f'(x)$ سے ہر ایک نقطے پر جو کہ c سے بائیں یا اس کے بہت قریب ہے، اور $f'(x) > 0$ سے ہر ایک نقطہ جو کہ c سے دائیں یا اس کے بہت قریب ہے، تب c ایک مقامی قلیل قدروں والا نقطہ ہے۔

(iii) اگر $f'(x)$ اپنا نشان نہیں بدلتا جیسے جیسے x، c کے ذریعے آگے بڑھتا ہے۔ تب c نا تو مقامی عظیم قدروں کا نقطہ ہے اور نہ مقامی قلیل قدروں کا۔ حقیقت میں اس طرح کے نقطہ کو موڑ کے نقطے کہتے ہیں۔ (شکل 6.15)

نوٹ اگر c، f کا مقامی اعظم نقطہ ہے، تب $f(c)$، f کی مقامی اعظم قدر ہے۔ اسی طرح اگر c، f کا مقامی قلیل قدر کا نقطہ ہے۔ تب $f(c)$، f کی مقامی قلیل قدر ہے۔

شکل 6.15 اور 6.16 جیومیٹریائی انداز میں مسئلہ 3 کو سمجھاتی ہے۔



شکل 6.16

مثال 29 ایک فنکشن کی تمام مقامی عظیم قدریں اور مقامی قلیل قدریں معلوم کیجیے جو کہ دیا گیا ہے۔

$$f(x) = x^3 - 3x + 3$$

حل ہمارے پاس ہے

$$f(x) = x^3 - 3x + 3$$

یا $$f'(x) = 3x2 - 3 = 3(x-1)\ (x+1)$$

یا $f'(x) = 0$ پر $x = -1$ اور $x = 1$

یہ نوٹ کر لیجیے کہ ان قدروں کے لیے جو 1 کے قریب ہیں اور 1 کے دائیں طرف ہیں، $f'(x) > 0$ اور وہ قدریں جو 1 کے قریب ہیں یا 1 کے بائیں طرف ہیں، $f'(x) < 0$۔ اس لیے پہلے مشتق جانچ سے $x = 1$ مقامی قلیل قدر کا نقطہ ہے اور اس کی مقامی قلیل قدر $f(1) = 1$ ہے۔ $x = -1$ کے کیس میں یہ نوٹ کر لیجیے کہ $f'(x) > 0$ ہے ان قدروں کے لیے جو (-1) کے قریب یا اس کے بائیں ہیں اور $f'(x) < 0$ ہے، ان قدروں کے لیے جو (-1) کے قریب یا اس کے دائیں ہیں۔ اس لیے پہلے مشتق جانچ سے، $x = -1$ مقامی عظیم قدر کا نقطہ ہے اور اس کی مقامی عظیم قدر $f(-1) = 5$ ہے۔

x کی قدریں		$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ کے نشانات
1 کے قریب	دائیں طرف (مان لیجیے 1.1 وغیر)	>0
	بائیں طرف (مان لیجیے 0.9)	<0
–1 کے قریب	دائیں طرف (مان لیجیے 0.9– وغیرہ)	<0
	بائیں طرف (مان لیجیے 1.1– وغیرہ)	>0

مثال 30 فنکشن f کی تمام مقامی عظیم قدروں اور مقامی قلیل قدروں کے نقاط معلوم کیجیے جو کہ دیا گیا ہے۔

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$$

حل ہمارے پاس ہے

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$$

یا $$f'(x) = 6x^2 - 12x + 6 = 6(x-1)^2$$

یا $f'(x) = 0$ پر $x = 1$

اس طرح $x = 1$، f کا واحد فاصل نقطہ ہے۔اب ہم اس نقطہ کی جانچ فنکشن f کی مقامی عظیم قدر اور یا مقامی قلیل قدر کے لیے کریں گے۔مشاہدہ کیجیے کہ $f'(x) \geq 0$ ہے تمام $x \in \mathbf{R}$ کے لیے اور خاص طور پر $f'(x) > 0$ ہے ان قدروں کے لیے جو 1 کے قریب ہیں اور 1 بائیں اور دائیں طرف۔اس لیے پہلی مشتق جانچ سے نقطہ $x = 1$ نا تو مقامی عظیم قدروں کا نقطہ ہے یا مقامی قلیل قدروں کا نقطہ ہے۔اس لیے $x = 1$ موڑ کا نقطہ

ریمارک یہ نوٹ کیا جا سکتا ہے کیونکہ مثال 30 میں $f'(x)$، R پر اپنا نشان نہیں بدلتا، f کے گراف کا کوئی بھی موڑ والا نقطہ نہیں ہے اور اس لیے مقامی عظیم قدروں اور مقامی قلیل قدروں کا کوئی نقطہ نہیں ہے۔

اب ہم مقامی عظیم قدروں اور مقامی قلیل قدروں کی جانچ کے لیے ایک نئی جانچ دیں گے دیے ہوئے فنکشن کے لیے۔ یہ جانچ لاگو کرنا زیادہ تر آسان ہے پہلے جانچ کے مقابلے میں۔

مسئلہ 4 دوسری مشتق جانچ (Second Derivative Test) مان لیجیے f ایک وقفہ I پر بیان کیا گیا ہے اور $c \in I$ ہے۔مان لیجیے f، c پر دوبار تفرق پذیر ہے، تب

(i) $x = c$ پر مقامی عظیم قدر کا نقطہ ہے اگر $f'(c) = 0$ اور $f''(c) < 0$ ہے۔
قدر $f(c)$، f کی مقامی عظیم قدر ہے

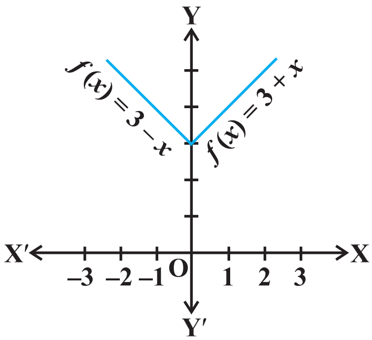
(ii) $x = c$ پر مقامی قلیل قدر کا نقطہ ہے اگر $f'(c) = 0$ اور $f''(c) > 0$ ہے
اس کیس میں $f(c)$، f کی مقامی قلیل قدر ہے۔

(iii) یہ جانچ فیل ہو جاتا ہے اگر $f'(c) = 0$ اور $f''(c) = 0$ ہوں

اس کیس میں، ہم پہلی مشتق جانچ میں چلے جاتے ہیں اور معلوم کرتے ہیں کہ کیا c ایک مقامی عظیم قدر کا نقطہ ہے، مقامی قلیل قدر کا یا موڑ کا نقطہ

نوٹ کیونکہ f، c پر دوبارہ تفرق پذیر ہے، ہمارا مطلب ہے f کا دوسرا مشتق c پر موجود ہے۔

مثال 31 f کی مقامی قلیل قدریں معلوم کیجیے جو کہ $f(x) = 3 + |x|, x \in \mathbf{R}$ دیا گیا ہے۔



شکل 6.17

حل یہ نوٹ کر لیجیے کہ دیا ہوا فنکشن $x = 0$ پر تفرق پذیر نہیں ہے۔اس طرح، دوسری مشتق جانچ فیل ہو جاتا ہے۔نوٹ کر لیجیے کہ 0، f کا نازک نقطہ ہے۔اب، 0 کے بائیں طرف، $f(x) = 3 - x$ اور اس لیے $f'(x) = -1 < 0$ ہے۔ساتھ ہی 0 کے دائیں طرف $f(x) = 3 + x$، ہے اور اس طرح $f'(x) = 1 > 0$ ہے۔اسلیے، پہلی مشتق جانچ سے $x = 0$ ایک f کا مقامی قلیل والا نقطہ ہے اور f کی مقامی قلیل قدر $f(0) = 3$ ہے۔

مثال 32 فنکشن f کی مقامی عظیم اور مقامی قلیل قدریں معلوم کیجیے، فنکشن اس طرح دیا گیا ہے۔

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$$

حل ہمارے پاس ہے

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$$

یا

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x-1)(x+2)$$

یا

$f'(x) = 0$ پر $x = 0, x = 1$ اور $x = -2$

اب

$$f''(x) = 36x^2 + 24x - 24 = 12(3x^2 + 2x - 1)$$

یا

$$\begin{cases} f''(0) & = -24 < 0 \\ f''(1) & = 36 > 0 \\ f''(-2) & = 72 > 0 \end{cases}$$

اس لیے، دوسرے مشتق ٹسٹ سے، $x = 0$ مقامی عظیم قدر کا نقطہ ہے اور f کی مقامی قلیل قدر $x = 0$ پر $f1(0) = 12$ ہے جب کہ $x = 1$ اور $x = -2$ مقامی قلیل قدروں اور مقامی عظیم قدروں کے نقطے ہیں اور f کی بالترتیب مقامی قلیل قدر $x = -1$ اور -2 پر $f(1) = 7$ اور $f(-2) = -20$ ہیں۔

مثال 33 فنکشن f کی مقامی عظیم قدریں ورمقامی قلیل قدریں معلوم کیجیے فنکشن f دیا گیا ہے۔

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$$

حل ہمارے پاس ہے

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$$

یا
$$\begin{cases} f'(x) = 6x^2 - 12x + 6 = 6(x-1)^2 \\ f''(x) = 12(x-1) \end{cases}$$

اب $f'(x) = 0$ دیتا ہے $x = 1$ ساتھ ہی $f''(1) = 0$ ہے۔اس لیے اس کیس میں دوسری مشتق جانچ فیل ہو جاتی ہے۔اس لیے، ہم پہلی مشتق جانچ میں واپس جا سکتے ہیں۔

ہم پہلے ہی دیکھ چکے ہیں (مثال 30) کہ پہلی مشتق جانچ کا استعمال کرنے پر، $x = 1$ نہ تو مقامی عظیم قدروں کا نقطہ ہے اور نہ ہی مقامی قلیل قدروں کا نقطہ ہے اس لیے یہ ردموڑ کا نقطہ ہے۔

مثال 34 دو مثبت اعداد معلوم کیجیے جن کا حاصل جمع 15 ہے اور جن کے مربعوں کا حاصل جمع قلیل ہے۔

حل مان لیجیے ان میں سے ایک نمبر x ہے۔تب دوسرا نمبر $(15 - x)$ ہے۔مان لیجیے $S(x)$ ان نمبروں کے مربعوں کے حاصل کو ظاہر کرتا ہے۔تب

$$S(x) = x^2 + (15 - x)^2 = 2x^2 - 30x + 225$$

یا
$$\begin{cases} S'(x) = 4x - 30 \\ S''(x) = 4 \end{cases}$$

اب کیونکہ $S'(x) = 0$، $x = \frac{15}{2}$ دیتا ہے۔ساتھ ہی $S''\left(\frac{15}{2}\right) = 4 > 0$ ہے۔اس لیے دوسرے مشتق کے ٹسٹ سے $x = \frac{15}{2}$، S کا مقامی قلیل قدروں کا نقطہ ہے۔اس لیے نمبروں کے مربعوں کا حاصل جمع قلیل ہے جب کہ نمبر $\frac{15}{2}$ اور $15 - \frac{15}{2} = \frac{15}{2}$ ہے۔

ریمارک مثال 34 کی طرح آگے بڑھنے پر بھی یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ دو مثبت اعداد جن کا مجموعہ k ہے اور جب کے مربعوں کا حاصل جمع قلیل ہے ہیں $\frac{k}{2}$ اور $\frac{k}{2}$

مثال 35 نقطہ $(0,c)$ کا مکافی $y=x^2$ سے چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ معلوم کیجیے، جہاں $1 \le c \le 5$ ہے۔

حل مان لیجیے مکافی $y=x^2$ پر (h,k) کوئی نقطہ ہے۔ مان لیجیے (h,k) اور $(0,c)$ کے درمیان کا مطلوبہ فاصلہ D ہے۔ تب

$$D=\sqrt{(h-0)^2+(k-c)^2}=\sqrt{h^2+(k-c)^2} \qquad (1)...$$

کیونکہ (h,k) مکافی $y=x^2$ پر واقع ہے، ہمارے پاس ہے $k=h^2$ اس طرح (1) دیتا ہے۔

$$D=D(k)=\sqrt{k+(k-c)^2}$$

یا

$$D'(k)=\frac{1+2(k-c)}{2\sqrt{k+(k-c)^2}}$$

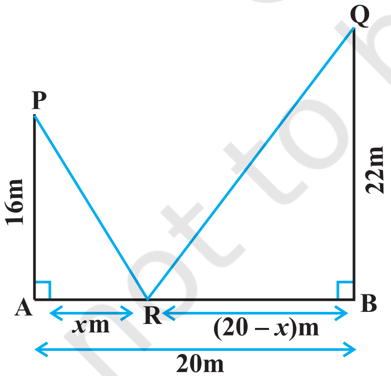
اب $D'(k)=0$ دیتا ہے $k=\frac{2c-1}{2}$

مشاہدہ کیجیے کہ جب $k<\frac{2c-1}{2}$ ہے تب $2(k-c)+1<0$ یعنی $D'(k)<0$ ہے۔ ساتھ ہی جب $k>\frac{2c-1}{2}$ تب $D'(k)>0$ ہے۔ تا کہ پہلے مشتق ٹسٹ سے $k=\frac{2c-1}{2}$ پر $D(k)$ قلیل ہے۔ اس لیے، مطلوبہ کم سے کم فاصلہ دیا گیا ہے

$$D\left(\frac{2c-1}{2}\right)=\sqrt{\frac{2c-1}{2}+\left(\frac{2c-1}{2}-c\right)^2}=\frac{\sqrt{4c-1}}{2}$$

نوٹ پڑھنے والا مثال 35 میں یہ نوٹ کر سکتا ہے کہ، ہم نے دوسری مشتق جانچ کے بجائے پہلی مشتق جانچ کا استعمال کیا ہے کیونکہ پہلا آسان اور چھوٹا ہے۔

مثال 36 مان لیجیے AP اور BQ بالترتیب نقاط A اور B پر دو عمودی کھمبے ہیں۔ اگر AP=15 میٹر اور BQ=22 میٹر اور AB=20 میٹر ہوں، تب AB پر نقطہ R سے نقطہ A کا فاصلہ معلوم کیجیے جب کہ RP^2+RQ^2 قلیل ہے۔



شکل 6.18

حل مان لیجیے AB پر ایک نقطہ R ہے جبکہ AR = xm ہے۔ تب RB = $(20-x)$ میٹر ہے۔ (کیونکہ AB = 20m ہے) شکل 6.18 ہے۔

ہمارے پاس ہے۔

$$RP^2=AR^2+AP^2$$

اور

$$RQ^2=RB^2+BQ^2$$

اس لیے $RP^2 + RQ^2 = AR^2 + AP^2 + RB^2 + BQ^2$

$$= x^2 + (16)^2 + (20-x)^2 + (22)^2$$

$$= 2x^2 - 40x + 1140$$

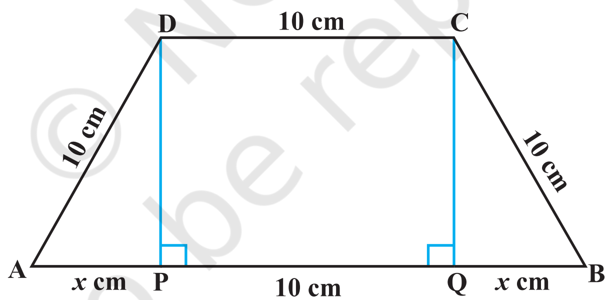
مان لیجیے $S \equiv S(x) = RP^2 + RQ^2 = 2x^2 - 40x + 1140$

اس لیے $S¢(x) = 4x - 40$

اب $S'(x) = 0$، $x = 10$ دیتا ہے۔ساتھ ہی کیونکہ $S''(x) = 4 > 0$ ہے،تمام x کے لیےاوراس طرح $S''(10) > 0$۔ اس لیے دوسری مشتق جانچ سے، $x = 10$، S' کے مقامی قلیل قدروں کا نقطہ ہے۔اس طرح R کا فاصلہ A سے AB پر $AR = x = 10m$ ہے۔

مثال 37 اگرایک منحرف (trapezium) کے تین اضلاع کی لمبائی اساس کےعلاوہ 10 سینٹی میٹر کے برابر ہیں،تب منحرف کارقبہ معلوم کیجیے جب یہ عظیم ہے۔

حل مطلوبہ منحرف شکل 6.19 میں دیا گیا ہے۔DP اور CP، AB پر عمود کھینچیے۔مان لیجیے $AP = x$ سینٹی میٹر ہے،نوٹ کر لیجیے



شکل 6.19

کہ $\Delta APD \sim \Delta BQC$ کے ہے۔اس لیے $QB = x\,cm$ ہے ساتھ ہی پائیتھا گورس مسئلہ $DP = QC\sqrt{100 - x^2}$ قلیل ہے۔مان لیجیے منحرف کارقبہ A ہے۔تب

$$A \equiv A(x) = \frac{1}{2}$$ (متوازی خطوط کا جوڑ)(اونچائی)

$$= \frac{1}{2}(2x + 10 + 10)\left(\sqrt{100 - x^2}\right)$$

$$= (x+10)\left(\sqrt{100-x^2}\right)$$

یا
$$A'(x) = (x+10)\frac{(-2x)}{2\sqrt{100-x^2}} + \left(\sqrt{100-x^2}\right)$$

$$= \frac{-2x^2-10x+100}{\sqrt{100-x^2}}$$

اب $A'(x) = 0$ دیتا ہے $2x^2+10x-100=0$ یعنی $x = 5$ اور $x = -10$

کیونکہ x فاصلہ کو دکھاتا ہے، یہ منفی نہیں ہوسکتا

اس طرح $x = 5$ ہے۔ اب

$$A''(x) = \frac{\sqrt{100-x^2}\,(-4x-10) - (-2x^2-10x+100)\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2}$$

(آسان کرنے پر)
$$= \frac{2x^3-300x-1000}{(100-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$A''(5) = \frac{2(5)^3-300(5)-1000}{(100-(5)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2250}{75\sqrt{75}} = \frac{-30}{\sqrt{75}} < 0$$

اس لیے منحرف کا رقبہ $x = 5$ پر عظیم ہے اور رقبہ دیا گیا ہے۔

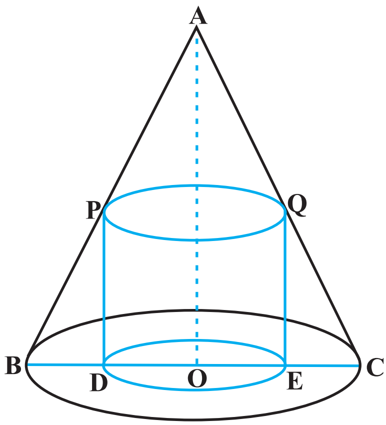
$$A(5) = (5+10)\sqrt{100-(5)^2} = 15\sqrt{75} = 75\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

مثال 38 ثابت کیجیے کہ قائم دائری اسطوانہ کا نصف قطر جس کی خمیدہ سطح کا رقبہ اعظم ترین ہے ایک دئے ہوئے مخروط کے اندر بنایا جاسکتا ہے۔ مخروط سے آدھا ہے۔

حل مان لیجیے $OC = r$ مخروط کا نصف قطر ہے اور $OA = h$ اس کی اونچائی ہے۔ مان لیجیے ایک اسطوانہ جس کا نصف قطر $OE=x$ ہے دیئے ہوئے مخروط کے اندر بنایا گیا (شکل 6.20) اسطوانہ کی اونچائی QE دی گئی ہے۔

(کیونکہ $\Delta QEC \sim \Delta AOC$)
$$\frac{QE}{OA} = \frac{EC}{OC}$$

یا
$$\frac{QE}{h} = \frac{r-x}{r}$$



شکل 6.20

یا $\text{QE} = \dfrac{h(r-x)}{r}$

مان لیجیے S اسطوانہ کی منحنی سطح کا رقبہ ہے۔ تب

$$S \equiv S(x) = \frac{2\pi x\, h(r-x)}{r} = \frac{2\pi h}{r}(rx - x^2)$$

یا
$$\begin{cases} S'(x) = \dfrac{2\pi h}{r}(r-2x) \\ S''(x) = \dfrac{-4\pi h}{r} \end{cases}$$

اب $S'(x) = 0$ دیتا ہے $x = \dfrac{r}{2}$۔ کیونکہ $S''(x) < 0$ ہے تمام x کے لیے

$S''\left(\dfrac{r}{2}\right) < 0$ ہے۔ تا کہ $x = \dfrac{r}{2}$ S کی عظیم قدروں کا نقطہ ہے۔ اس

لیے اسطوانہ کی اعظم منحنی سطح کا رقبہ جو کہ دیے ہوئے مخروط کے اندر بنایا جا سکتا ہے۔ مخروط کا رقبہ آدھا ہے۔

6.6.1 ایک بند وقفہ میں ایک تفاعل کی اعظم اور قلیل ترین قدریں

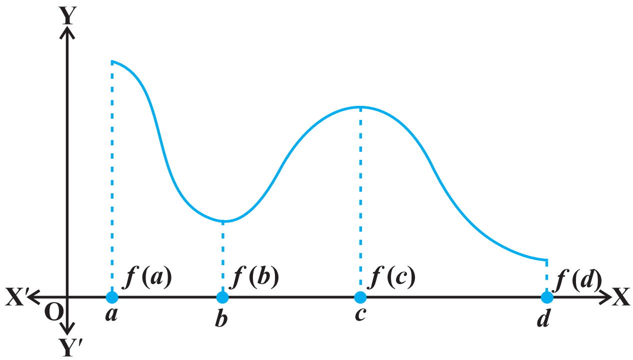
ہم ایک فنکشن f پر غور کرتے ہیں جو دیا گیا ہے۔

$$f(x) = x + 2, x \in (0, 1)$$

اس کا مشاہدہ کیجیے کہ فنکشن (0,1) میں مسلسل ہے اور جو نا تو اعظم قدر رکھتا ہے اور نہ ہی قلیل قدر رکھتا ہے۔ اس کے آگے، ہم یہ نوٹ کر سکتے ہیں کہ نا تو تفاعل مقامی اعظم قدر رکھتا ہے اور نہ مقامی قلیل قدر۔

حالانکہ، اگر ہم f کا علاقہ بند وقفہ [0,1] تک بڑھا دیں، تب بھی ہو سکتا ہے f کی کوئی بھی اعظم قلیل قدر نہ ہو لیکن یقیناً یہ اعظم قدر $f(1) = 3$ اور قلیل قدر $f(0) = 2$ رکھتا ہے۔ f کی اعظم قدر 1,3 = x پر اس کی اعظم قدر (عالمی اعظم قدر یا سب سے بڑی قدر) کہلاتی ہے وقفہ [0,1] پر، اس طرح 2 کی قلیل قدر $x = 0$ پر مطلق قلیل قدر (عالمی قلیل قدر یا سب سے چھوٹی قدر) کہلاتی ہے وقفہ [0,1] پر۔

شکل 6.21 میں ایک مسلسل تفاعل کے دیئے ہوئے گراف پر غور کیجیے جو کہ بند وقفہ $[a,d]$ میں بیان کیا گیا ہے۔ مشاہدہ کیجیے کہ تفاعل f، $x = b$ پر مقامی قلیل قدریں رکھتا ہے اور مقامی قلیل قدر $f(b)$ ہے۔ تفاعل $x = c$ پر بھی عظیم قدریں رکھتا ہے اور اعظم ترین $f(c)$ ہے۔



شکل 6.21

ساتھ ہی گراف سے ظاہر ہے کہ f کی مطلق اعظم قدر $f(a)$ اور مطلق قلیل قدر $f(d)$ ہے اس کے آگے نوٹ کیجیے کہ f کی مطلق عظیم (قلیل) قدر f کی مقامی عظیم (قلیل) قدر سے مختلف ہے۔

اب ہم بند وقفہ I میں فنکشن کی مطلق عظیم قدروں اور مطلق قلیل قدروں کے بارے میں دو نتائج (بغیر ثبوت کے) بیان کریں گے۔

مسئلہ 5 مان لیجیے وقفہ $\mathrm{I} = (a,b)$ میں f ایک مسلسل تفاعل ہے۔ تب f کی مطلق قدر ہوگی جو I، f میں سے کم سے کم ایک بار حاصل کرلے گا۔ ساتھ ہی، f کی ایک مطلق قلیل قدر ہے اور وہ 1 سے کم سے کم I میں ایک بار حاصل کرلے گا۔

مسئلہ 6 مان لیجیے بند وقفہ I میں f ایک تفرق پذیر فنکشن f ہے اور مان لیجیے I، c کا کوئی بھی ایک اندرونی نقطہ ہے۔ تب

(i) $f'(c) = 0$ ہے اگر f، c پر ایک مطلق عظیم قدر حاصل کرتا ہے۔

(ii) $f'(c) = 0$ ہے اگر f، c پر ایک مطلق قلیل قدر حاصل کرتا ہے۔

اوپر کے نتیجوں کو مدنظر رکھتے ہوئے، ہمارے پاس ایک دیئے ہوئے فنکشن کو بند وقفہ I میں رکھ کر مطلق عظیم اور یا مطلق قلیل قدروں کو معلوم کرنے کے لیے کام کرنے والے اصول ہیں۔

کام کرنے کے اصول

قدم 1: f میں تمام فاصل نقاط کے لیے، یعنی، x، نقاط معلوم کیجیے جہاں $f'(x) = 0$ ہے یا f تفرق پذیر نہیں ہے۔

قدم 2: وقفہ کے سرے کے نقاط لیجیے۔

قدم 3: ان تمام نقاط پر (قدم 1 اور 2 میں جن کی فہرست بنائی گئی ہے) f کی قدروں کا حساب لگائیے۔

قدم 4: قدم 5 میں f کی حساب لگائی قدروں کے عظیم اور قلیل قدروں کی پہچان کیجیے۔ یہ عظیم قدر f کی مطلق عظیم قدر f کی مطلق عظیم قدر (سب سے زیادہ) ہوگی اور f کی قلیل قدر مطلق قلیل (سب سے کم) قدر ہوگی۔

مثال 39 ایک فنکشن f کی مطلق عظیم اور مطلق قلیل قدریں معلوم کیجیے۔

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$$ وقفہ $[1,5]$ پر

حل ہمارے پاس ہے

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$$

یا

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x - 3)(x - 2)$$

یہ نوٹ کر لیجیے کہ $f'(x) = 0$، $x = 2$ اور $x = 3$ دیتا ہے۔

اب ہم f کی قدر ان نقاط پر معلوم کریں گے اور وقفہ $[1,5]$ کے آخری نقاط پر یعنی $x = 1$، $x = 2$، $x = 3$ اور $x=5$ پر۔ تاکہ

$$f(1) = 2(1^3) - 15(1^2) + 36(1) + 1 = 24$$

$$f(2) = 2(2^3) - 15(2^2) + 36(2) + 1 = 29$$

$$f(3) = 2(3^3) - 15(3^2) + 36(3) + 1 = 28$$

$$f(5) = 2(5^3) - 15(5^2) + 36(5) + 1 = 56$$

اس طرح، ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ f کی $[1,5]$ پر مطلق عظیم قدر 56 ہے، جو کہ $x = 5$ موجود ہے اور f کی مطلق قلیل قدر $[1,5]$ پر 24 ہے جو کہ نقطہ $x = 1$ پر ہے۔

مثال 40 فنکشن f کی مطلق عظیم قدریں معلوم کیجیے جو گیا ہے۔

$$f(x) = 12x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}},\ x \in [-1, 1]$$

حل ہمارے پاس ہے

$$f(x) = 12x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}$$

یا
$$f'(x) = 16x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{2(8x-1)}{x^{\frac{2}{3}}}$$

اس طرح $f'(x) = 0$، $x = \frac{1}{8}$ دیتا ہے۔اس کے آگے نوٹ کیجیے کہ $f'(x)$، $x = 0$ پر معرف نہیں ہے اس لیے فاصل نقاط $x = 0$ اور $x = \frac{1}{8}$ ہیں۔اب f کی قدروں کا فاصل نقاط $x = 0, \frac{1}{8}$ پر اندازہ لگانے پر اور وقفہ کے سرے کے نقاط $x = -1$ اور $x = 1$ پر اندازہ لگانے پر، ہمارے پاس ہے۔

$$f(-1) = 12(-1)^{\frac{4}{3}} - 6(-1)^{\frac{1}{3}} = 18$$

$$f(0) = 12(0) - 6(0) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = 12\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{4}{3}} - 6\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{-9}{4}$$

$$f(1) = 12(1)^{\frac{4}{3}} - 6(1)^{\frac{1}{3}} = 6$$

اس طرح ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ f کی مطلق عظیم قدر 18 ہے جو کہ $x = -1$ پر واقع ہے اور f کی مطلق قلیل قدر $\frac{-9}{4}$ ہے جو کہ $x = \frac{1}{8}$ پر واقع ہے۔

مثال 41 ایک فوج کا پاچی ہیلی کاپٹر منحنی $y = x^2 + 7$ کے ساتھ اڑ رہا ہے۔ایک سپاہی جو کہ $(3,7)$ پر تعینات ہے چاہتا ہے کہ ہیلی کاپٹر پر نشانہ لگا کر گرائے جب کہ یہ اس کے قریب ہو۔سب سے قریبی فاصلہ معلوم کیجیے۔

حل x کی ہر ایک قدر کے لیے، ہیلی کاپٹر کی جگہ (پوزیشن) نقطہ $(x, x^2 + 7)$ پر ہے۔اس لیے ہیلی کاپٹر اور سپاہی کے درمیان فاصلہ جو کہ $(3,7)$ پر تعینات کیا گیا ہے۔یہ ہے۔

$$\sqrt{(x-3)^2 + (x^2+7-7)^2} \text{ یعنی } \sqrt{(x-3)^2 + x^4}$$

مان لیجیے
$$f(x) = (x-3)^2 + x^4$$

یا
$$f'(x) = 2(x-3) + 4x^3 = 2(x-1)(2x^2+2x+3)$$

اس طرح $f'(x) = 0$ دیا ہوا ہے $x = 1$ یا $2x^2 + 2x + 3 = 0$ دیتا ہے جس کے لیے کوئی حقیقی جذر نہیں ہے۔ ساتھ ہی وقفہ کے کوئی بھی آخری نقاط نہیں ہیں جو اس سیٹ میں جوڑے جاسکیں جہاں $f'(x)$ صفر ہے، یعنی .صرف ایک نقطہ ہے جو $x=1$ ہے۔ اس نقطہ پر f کی قیمت $f(1)=(1-3)^2+(1)^4=5$ سے دی گئی ہے۔ اس طرح، ہیلی کا پٹر اور سپاہی کے درمیان فاصلہ $\sqrt{f(1)} = \sqrt{5}$ ہے۔

نوٹ کر لیجیے کہ $\sqrt{5}$ یا تو عظیم قدر ہے یا قلیل قدر ہے۔ کیونکہ

$$\sqrt{f(0)} = \sqrt{(0-3)^2 + (0)^4} = 3 > \sqrt{5}$$

اس سے ہم اس نتیجہ پر پہونچتے ہیں کہ $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{f(x)}$ کی قلیل قدر ہے، اس لئے، $\sqrt{5}$ سپاہی اور ہیلی کا پٹر کے درمیان قلیل فاصلہ ہے۔

مشق 6.5

1۔ ذیل فنکشن کی عظیم اور قلیل قدریں معلوم کیجیے، اگر کوئی ہے،

(i) $f(x)=(2x-1)^2+3$ (ii) $f(x)=9x^2+12x+2$

(iii) $f(x) = -(x-1)^2+10$ (iv) $g(x) = x^3+1$

2۔ ذیل فنکشن کی عظیم اور قلیل قدریں معلوم کیجیے، گر کوئی موجود ہے۔

(i) $f(x) = |x + 2| - 1$ (ii) $g(x) = -|x + 1| + 3$

(iii) $h(x) = \sin(2x) + 5$ (iv) $f(x) = |\sin 4x + 3$

(v) $h(x) = x + 1, x \in (-1, 1)$

3۔ مقامی عظیم قدریں اور مقامی قلیل قدریں معلوم کیجیے، اگر موجود ہیں، ذیل فنکشن کی۔ ساتھ مقامی عظیم قدر اور مقامی قلیل قدر معلوم کیجیے، جیسا کہ کیس ہو:

(i) $f(x) = x^2$ (ii) $g(x) = x^3 - 3x$

(iii) $h(x) = \sin x + \cos x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

(iv) $f(x) = \sin x - \cos x, 0 < x < 2\pi$

(v) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$

(vi) $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}, \quad x > 0$

(vii) $g(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$

(viii) $f(x) = x\sqrt{1-x}, \quad x > 0$

4۔ ثابت کیجیے کہ ذیل فنکشن کی عظیم اور قلیل قدریں نہیں ہیں۔

(i) $f(x) = e^x$

(ii) $g(x) = \log x$

(iii) $h(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

5۔ ذیل فنکشن کی مطلق اعظم قدر اور مطلق قلیل قدر دیئے ہوئے وقفہ میں معلوم کیجیے۔

(i) $f(x) = x^3, x \in [-2, 2]$

(ii) $f(x) = \sin x + \cos x, x \in [0, \pi]$

(iii) $f(x) = 4x - \frac{1}{2}x^2, \quad x \in \left[-2, \frac{9}{2}\right]$

(iv) $f(x) = (x-1)^2 + 3, \quad x \in [-3, 1]$

6۔ وہ عظیم منافع معلوم کیجیے جو کمپنی کو ہوسکتا ہے، اگر منافع تفاعل اس طرح دیا گیا ہے۔

$$p(x) = 41 - 24x - 18x^2$$

7۔ وقفہ $[0,3]$ پر تفاعل $3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 48x + 25$ کی دونوں عظیم قدر اور قلیل قدر معلوم کیجیے۔

8۔ وقفہ $[0,2\pi]$ کے کس نقطہ پر، تفاعل $\sin 2x$ اعظیم قدر حاصل کرسکتا ہے؟

9۔ فنکشن $x + \cos x$ کی اعظم قدر کیا ہے؟

10۔ فنکشن $2x^3 - 24x + 107$ کی وقفہ $[1,3]$ میں اعظم قدر معلوم کیجئے۔ اسی تفاعل کی وقفہ $[-3,-1]$ میں اعظم قدر معلوم کیجیے۔

11۔ یہ دیا ہوا ہے کہ $x = 1$ پر، تفاعل $x^4 - 62x^2 + ax + 9$ اپنی اعظم قدر وقفہ $[0,2]$ پر حاصل کر لیتا ہے۔ a کی قدر معلوم کیجیے۔

12۔ فنکشن $x + \sin 2x$ کی وقفہ $[0, 2\pi]$ پر عظیم اور قلیل قدریں معلوم کیجیے۔

13۔ دو اعداد معلوم کیجیے جن کا مجموعہ 24 ہے اور جن کا حاصل ضرب جتنا بڑا ممکن ہو وہ ہے۔

14۔ دو مثبت اعداد x اور y معلوم کیجیے تاکہ $x + y = 60$ اور xy^3 اعظم ہو۔

15۔ دو مثبت اعداد x اور y معلوم کیجیے تا کہ ان کا حاصل جمع 35 اور حاصل ضرب $x^2 y^5$ ایک اعظم ہے۔

16۔ دو مثبت اعداد معلوم کیجیے جن کا حاصل جمع 16 ہے اور جن کے کعب کا حاصل جمع قلیل ہے۔

17۔ ٹین کے ایک مربع ٹکڑا کا جس کا ضلع 8 سینٹی میٹر ہے بغیر چھت والے ایک ڈبے میں تبدیل کیا گیا ہے، ٹین کے ٹکڑے کے ہر ایک کونے سے ایک مربع ٹکڑا کاٹ کر اور اس کے بازوؤں کو موڑ کر۔ اس مربع کا کیا ضلع ہوگا جو کاٹا گیا ہے تا کہ ڈبے کا حجم عظیم ممکن ہو۔

18۔ ٹین کے ایک مستطیل ٹکڑے 45 سینٹی میٹر ضرب 24 سینٹی میٹر کے ہر کونے سے ایک مربع کونا کاٹ کر اور پھر اس کے بازوؤں کو موڑ کر ایک ڈبہ بنایا گیا ہے کاٹے گئے مربع کا ضلع کیا ہوگا تا کہ بنائے گئے ڈبہ کا حجم عظیم ہو۔

19۔ دکھایئے کہ ایک مستقل دائرہ میں بنائے گئے تمام مستطیل میں، مربع کا رقبہ عظیم ہے۔

20۔ دکھایئے کہ دی ہوئی سطح اور عظیم حجم والے قائم دائری اسطوانہ ایسا ہے کہ اس کی اونچائی اساس کے قطر کے برابر ہے۔

21۔ تمام بند اسطوانائی ڈبوں میں سے (قائم دائری) دئے ہوئے حجم 100 cubic cm کا، اس ڈبے کی پیمائش معلوم کیجیے جس کا سطحی رقبہ عظیم ہے؟

22۔ 28 میٹر ایک لمبے تار کو دو ٹکڑوں میں کاٹا گیا ہے۔ ٹکڑوں میں سے ایک کو مربع میں تبدیل کیا گیا ہے اور دوسرے کو دائرہ میں۔ دونوں ٹکڑوں کی لمبائیاں کیا ہوں گی تا کہ مربع اور دائرہ کا مجموعی رقبہ قلیل ہو۔

23۔ ثابت کیجیے کہ سب سے بڑے مخروط کا حجم جو کہ ایک کرہ کے اندر بنایا گیا ہے اور جس کا نصف قطر R ہے، کرہ کے حجم کا $\frac{8}{27}$ ہے

24۔ دکھایئے کہ قائم دائری مخروط جس کی خمیدہ سطح کم سے کم ہے اور دیے ہوئے حجم میں ایک ارتفاع اساس کے نصف قطر کا $\sqrt{2}$ گنا ہے۔

25۔ دکھایئے کہ ایک مخروط کا نصف راسی زاویہ اور جس کا عظیم حجم ہے اور ترچھی اونچائی ہے دی ہوئی $\tan^{-1}\sqrt{2}$ ہے۔

26۔ دکھایئے کہ قائم دائری مخروط کا نصف راسی زاویہ جس کا سطحی رقبہ دیا ہوا ہے کا اور حجم عظیم ہے $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ ہے۔

سوال 27 یا 29 میں صحیح جواب چنئے۔

27۔ منحنی $x^2 = 2y$ پر وہ نقطہ جو نقطہ (0,5) کے قریب ہے۔ یہ ہے۔

(A) $(2\sqrt{2},4)$ (B) $(2\sqrt{2},0)$ (C) $(0,\ 0)$ (D) $(2,\ 2)$

28- x کی تمام حقیقی قدروں کے لیے $\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ کی قلیل قدر ہے۔

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) $\dfrac{1}{3}$

29- $[x(x-1)+1]^{\frac{1}{3}}$، $0 \le x \le 1$ کی عظیم قدر ہے۔

(A) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) 0

متفرق مثالیں

مثال 42 ایک کار ایک نقطہ P سے وقت $t = 0$ سیکنڈ چلی اور نقطہ Q پر رکی۔ اس کے ذریعہ طے کیا گیا فاصلہ x میٹر، t سیکنڈ میں دیا گیا ہے۔

$$x = t^2\left(2-\frac{t}{3}\right)$$

اس کے ذریعے نقطہ Q تک پہنچنے میں، لگایا گیا وقت معلوم کیجیے، اور P اور Q کے درمیان فاصلہ بھی معلوم کیجیے۔

حل مان لیجیے کار کی رفتار v ہے t سیکنڈ پر

اب
$$x = t^2\left(2-\frac{t}{3}\right)$$

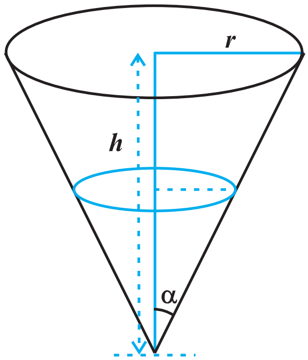
اس لیے
$$v = \frac{dx}{dt} = 4t - t^2 = t(4-t)$$

اس طرح $v = 0$ دیتی ہے $t = 0$ اور/ یا $t = 4$

اب $v = 0$ ہے P پر اور اس طرح Q پر، $t = 0$۔ اس لیے Q پر $t = 4$ ہے۔ اس طرح، کار نقطہ Q پر 4 سیکنڈ میں پہنچتی ہے۔
ساتھ ہی 4 سیکنڈ میں چلا گیا فاصلہ اس طرح دیا گیا ہے۔

$$x]_{t=4} = 4^2\left(2-\frac{4}{3}\right) = 16\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{3}\text{ m}$$

مثال 43 ایک پانی کے ٹینک کی شکل الٹے قائم دائری مخروط کی ہے جس کا محور اسی ہے اور راس سب سے نیچے ہے۔ اس کا



شکل6.22

آدھا۔راسی زاویہ $\tan^{-1}(0.5)$ ہے۔اس میں پانی 5 کعبی میٹر فی گھنٹہ کی مستقل شرح سے ڈالا گیا ہے۔وہ شرح معلوم کیجیے جس سے پانی کی سطح اسی لمحہ بڑھ رہی ہے جب کہ ٹینک میں پانی کی گہرائی 4 میٹر ہے۔

حل مان لیجیے r، h اور α شکل 6.22 میں کی طرح طرح ہیں۔تب $\tan\alpha = \frac{r}{h}$.

تاکہ
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{r}{h}\right)$$

لیکن
$$\alpha = \tan^{-1}(0.5) \text{ (دیا ہوا ہے)}$$

یا
$$\frac{r}{h} = 0.5$$

یا
$$r = \frac{h}{2}$$

مان لیجیے V مخروط کا حجم ہے۔تب

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$$

اس لیے
$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dh}\left(\frac{\pi h^3}{12}\right)\cdot\frac{dh}{dt} \text{ (زنجیری اصول سے)}$$

$$= \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

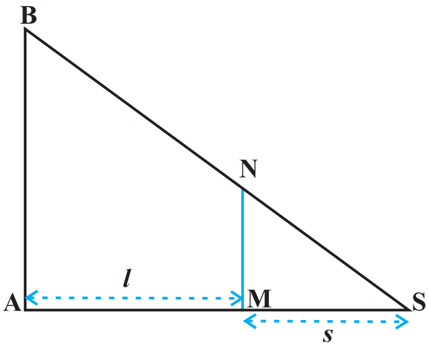
اب حجم کا شرح تبدیلی، یعنی، $\frac{dV}{dt} = 5^3/\text{h}$ اور $h = 4\text{m}$ ہے۔

اس لیے
$$5 = \frac{\pi}{4}(4)^2\cdot\frac{dh}{dt}$$

یا
$$\frac{dh}{dt} = \frac{5}{4\pi} = \frac{35}{88}\text{ m/h} \left(\pi = \frac{22}{7}\right)$$

اس طرح، پانی کی سطح کا شرح تبدیلی $\frac{35}{88}$ m/h ہے۔

مثال 44 ایک آدمی جس کی اونچائی 2 میٹر ہے ایک روشنی دینے والے بجلی کے کھمبے سے 5 کلومیٹر / گھنٹہ کی یکساں رفتار سے دور چلتا ہے، وہ کھمبا 6 میٹر اونچا ہے۔وہ شرح معلوم کیجیے جس سے اس کی پرچھائی کی لمبائی بڑھتی ہے۔



شکل 6.23

حل شکل 6.23 میں، مان لیجیے روشنی دینے والا کھمبا AB ہے، لمپ پوزیشن B پر ہے اور مان لیجیے MN آدمی ہے، ایک خاص وقت t پر اور مان لیجیے $AM = l$ میٹر ہے۔ تب MS آدمی کی پر چھائی ہے۔ مان لیجیے $MS = s$ میٹر

نوٹ کریں لیجیے $\Delta MSN \sim \Delta ASB$

یا $$\frac{MS}{AS} = \frac{MN}{AB}$$

یا $AS = 3s$ (کیونکہ $MN = 2$ ہے اور $AB = 6$ (دیا ہوا ہے)

اس طرح $AM = 3s - s = 2s$ لیکن $AM = l$

اس لیے $l = 2s$

اس لیے $$\frac{dl}{dt} = 2\frac{ds}{dt}$$

کیونکہ $\frac{dl}{dt} = 5$ کلومیٹر / گھنٹہ ہے۔ اس لیے، پر چھائی کی لمبائی $\frac{5}{2}$ کلومیٹر / گھنٹہ کی شرح سے بڑھ رہا ہے۔

مثال 45 منحنی $x^2 = 4y$ کے نارمل کی مساوات معلوم کیجیے جو کہ (1,2) سے ہو کر گزر رہا ہے۔

حل $x^2 = 4y$ کا تفرق x کی مناسبت سے کیجیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$$

مان لیجیے (h,k) مختص ہیں اس نقطہ کے جہاں نارمل اور منحنی $x^2 = 4y$ ملتے ہیں۔ اب، مماس کا سلوپ (h,k) پر اس طرح دیا ہے۔

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(h,\,k)} = \frac{h}{2}$$

اس طرح، نارمل کا سلوپ (h,k) پر ہے۔ $= \frac{-2}{h}$

اس لیے، نارمل کی مساوات (h,k) پر ہے۔

$$y - k = \frac{-2}{h}(x - h) \quad \ldots(1)$$

کیونکہ یہ نقطہ (1,2) سے ہوکر گزر رہا ہے، ہمارے پاس ہے

$$k = 2 + \frac{2}{h}(1-h) \text{ یا } 2 - k = \frac{-2}{h}(1-h) \qquad (2)\ldots$$

کیونکہ (h,k) منحنی $x^2 = 4y$ پر واقع ہے، ہمارے پاس ہے۔

$$h2 = k \qquad (3)\ldots$$

(2) اور (3) سے ہمارے پاس ہے $k = 2$ اور $h = 1$۔ k اور h کی قدریں (1) میں رکھنے پر ہمیں نارمل کی مساوات اس طرح ملتی ہے۔

$$y - 1 = \frac{-2}{2}(x-2) \text{ یا } x + y = 3$$

مثال 46 منحنی $y = \cos(x+y), -2\pi \le x \le 2p$ پر مماس کی مساوات معلوم کیجیے جو کہ خط $x + 2y = 0$ کے متوازی ہے۔

حل $y = \cos(x+y)$ کا x کو مدنظر رکھتے ہوئے تفرق کرنے پر ہمارے پاس ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$$

یا اور مماس کا (x,y) پر سلوپ $= \dfrac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$

کیونکہ دی ہوئی منحنی پر مماس خط $x + 2y = 0$ کے متوازی ہیں، جس کا سلوپ $\dfrac{-1}{2}$ ہے، ہمارے پاس ہے۔

$$\frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)} = \frac{-1}{2}$$

یا $\sin(x+y) = 1$

یا $x+y = n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$

تب $y = \cos(x+y) = \cos\left(n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{2}\right), n \in \mathbf{Z}$

$= 0$ تمام کے لیے $n \in \mathbf{Z}$ ہے۔

ساتھ ہی کیونکہ $-2\pi \le x \le 2\pi$ ہے، ہمیں حاصل ہوتا ہے $x = \dfrac{-3\pi}{2}$ اور $x = \dfrac{\pi}{2}$، اس طرح، دی ہوئی منحنی پر مماس خط $x + 2y = 0$ کے متوازی ہیں صرف نقاط $\left(\dfrac{-3\pi}{2}, 0\right)$ اور $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ پر اس لیے مماس کی مطلوبہ مساوات ہیں۔

$$y-0=\frac{-1}{2}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$$ یا $$2x+4y+3\pi=0$$

اور $$y-0=\frac{-1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$ یا $$2x+4y-\pi=0$$

مثال 47 وہ وقفے معلوم کیجیے جہاں دیا ہوا فنکشن

$$f(x)=\frac{3}{10}x^4-\frac{4}{5}x^3-3x^2+\frac{36}{5}x+11$$

(a) بڑھ رہا ہے (b) گھٹ رہا ہے۔

حل ہمارے پاس ہے۔

$$f(x)=\frac{3}{10}x^4-\frac{4}{5}x^3-3x^2+\frac{36}{5}x+11$$

اس لیے $$f(x)=\frac{3}{10}(4x^3)-\frac{4}{5}(3x^2)-3(2x)+\frac{36}{5}$$

حل کرنے پر $$=\frac{6}{5}(x-1)(x+2)(x-3)$$

شکل 6.24

اب $f'(x)=0$ دیتا ہے $x=1$، $x=-2$ یا $x=3$۔ نقاط $x=1$، -2 اور 3 حقیقی خط کو چار غیر مشترک وقفوں میں بانٹتے ہیں، جن کے نام ہیں (–

$(-\infty,-2)$، $(-2,1)$، $(1,3)$ اور $(3,\infty)$ (شکل 6.24)

وقفہ $(-\infty,-2)$ پر غور کیجیے، یعنی، جب $-\infty<x<-2$ ہو۔ اس کیس میں، ہمارے پاس ہے $x-1<0$، $x+2<0$ اور $x-3<0$ ہے۔

(خاص طور پر مشاہدہ کیجیے کہ $x=-3$ کے لیے $f'(x)=(x-1)(x+2)(x-3)=(-4)(-1)(-6)<0$)

اس لیے $f'(x)<0$ جب کہ $-\infty<x<-2$ ہے۔

اس طرح، فنکشن f، $(-\infty,-2)$ میں گھٹ رہا ہے۔

وقفہ $(-2,1)$ پر غور کیجیے، یعنی، جب $-2<x<1$ ہو

اس کیس میں، ہمارے پاس ہے $x-1<0$، $x+2>0$ اور $x-3<0$ ہے۔

(خاص طور پر مشاہدہ کیجیے کہ $x=0$ کے لیے $f'(x)=(x-1)(x+2)(x-3)=(-1)(2)(-3)=6>0$)

اس لیے $f'(x) > 0$ جب کہ $-2 < x < 1$ ہے۔

اس طرح فنکشن f، $(-2,1)$ میں گھٹ رہا ہے۔

اب وقفہ $(1,3)$ پر غور کیجیے، یعنی، جب $1 < x < 3$ ہو۔ اس کیس میں، ہمارے پاس ہے $x-1>0$، $x+2>0$ اور $x-3<0$

اس طرح $f'(x) < 0$ جب کہ $1 < x < 3$

اس طرح فنکشن f، $(1,3)$ میں کم ہو رہا ہے۔

آخر میں وقفہ $(3,\infty)$ پر غور کیجیے، یعنی، جب کہ $x>3$۔ اس کیس میں، ہمارے پاس ہے $x-1>0$، $x+2>0$ اور $x-3>0$۔ اس طرح $f'(x)>0$ ہے جب کہ $x>3$۔

اس طرح وقفہ $(3,\infty)$ میں f بڑھ رہا ہے۔

مثال 48 دکھایئے کہ فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے۔

$$f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x),\ x > 0$$

ہمیشہ $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ میں سے بڑھ رہا فنکشن ہے۔

حل ہمارے پاس ہے۔

$$f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x),\ x > 0$$

اس لیے $$f'(x) = \frac{1}{1+(\sin x+\cos x)^2}(\cos x - \sin x)$$

$$= \frac{\cos x - \sin x}{2+\sin 2x} \quad \text{(آسان کرنے پر)}$$

یہ نوٹ کر لیجیے کہ $2 + \sin 2x > 0$ ہے، تمام x $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ میں ہیں۔

اس لیے $f'(x) > 0$ اگر $\cos x - \sin x > 0$

یا $f'(x) > 0$ اگر $\cos x > \sin x$ یا $\cot x > 1$

اب $\cot x > 1$ اگر $\tan x < 1$، یعنی، $0 < x < \frac{\pi}{4}$

اس طرح $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ میں $f'(x) > 0$

اس لیے f، $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ میں بڑھ رہا ہے۔

مثال 49 ایک گولا کار ڈسک جس کا نصف قطر 3 cm ہے گرا کی گئی ہے۔ پھیلاؤ کی وجہ سے اس کا نصف قطر 0.05cm/s کی سینٹی میٹر فی سیکنڈ شرح سے بڑھ گیا ہے۔ معلوم کیجیے اس کا رقبہ کس شرح سے بڑھ رہا ہے جب اس کا نصف قطر 3.2cm ہے۔

حل مان لیجیے دی ہوئی ڈسک کا رقبہ A ہے اور نصف قطر r ہے۔

$$A = \pi r^2$$

یا $$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$ (زنجیری اصول سے)

اب نصف قطر کے بڑھنے کی تقریب شرح $= dr = \frac{dr}{dt}\Delta t = 0.05\,\text{cm/s}$ سینٹی میٹر فی سیکنڈ

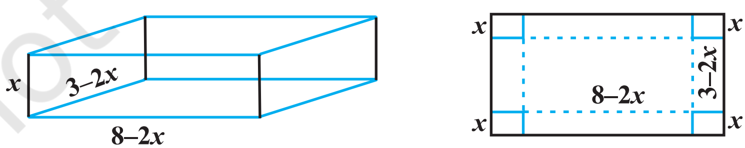
اس لیے رقبہ میں بڑھنے کی تقریب شرح اس طرح دی گئی ہے۔

$$= 2\pi r\left(\frac{dr}{dt}\Delta t\right)$$

$= 2\pi(3.2)(0.05) = 0.320\pi$ سینٹی میٹر فی میٹر سینٹی میٹر^2/s ($r = 3.2$ سینٹی میٹر)

مثال 50 ایلومنیم کی ایک مستطیل نما چادر جو کہ 3 میٹر ضرب 8 میٹر کی ہے، سے اس کے کونے مربع نما شکل میں کونے کاٹ کر اور اس کے کناروں کو موڑ پر اوپر سے کھلا ہوا ایک صندوق بنانا ہے۔ اس طرح کے بڑے سے بڑے صندوق کا حجم معلوم کیجیے۔

حل مان لیجیے ہٹائے گئے مربعوں کے ضلع کی لمبائی x میٹر ہے۔ تب صندوق کی اونچائی x میٹر ہے، لمبائی $8-2x$ اور چوڑائی $3-2x$ (شکل 6.25)۔ اگر صندوق کا حجم $V(x)$ ہے، تب



(b) (a)

شکل 6.25

$$V(x) = x(3-2x)(8-2x)$$
$$= 4x^3 - 22x^2 + 24x$$

اس لیے
$$\begin{cases} V'(x) = 12x^2 - 44x + 24 = 4(x-3)(3x-2) \\ V''(x) = 24x - 44 \end{cases}$$

اب $V'(x) = 0$ دیتا ہے $x = 3, \frac{2}{3}$ لیکن $x \neq 3$ (کیوں؟)

اس طرح ہمارے پاس ہے $x = \frac{2}{3}$۔ اب $V''\left(\frac{2}{3}\right) = 24\left(\frac{2}{3}\right) - 44 = -28 < 0$

اس لیے $x = \frac{2}{3}$ عظیم قدروں کا نقطہ ہے یعنی، اگر ہم $\frac{2}{3}$ میٹر والے ضلع کا مربع چادر کے ہر کونے سے ہٹائیں اور ایک بقیہ چادر سے ایک صندوق تیار کریں، تب اس طرح حاصل کیے گئے صندوق کا حجم سب سے زیادہ ہے اور یہ دیا گیا ہے۔

$$V\left(\frac{2}{3}\right) = 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 22\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 24\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{200}{27} \text{ مکعب میٹر}$$

مثال 51 ایک اشیاء بنانے والے x اشیاء کو $\left(5 - \frac{x}{100}\right)$ روپیہ فی شئے کے حساب سے بیچتا ہے x اشیاء کی قیمت خرید $\left(\frac{x}{5} + 500\right)$ روپیہ ہے۔ اشیاء کی وہ تعداد معلوم کیجیے جسے بیچنے سے اسے اعظم ترین منافع حاصل ہو۔

حل مان لیجیے x اشیاء کی قیمت فروخت $S(x)$ اور x اشیاء کی قیمت خرید $C(x)$ ہے۔ تب، ہمارے پاس ہے۔

$$S(x) = \left(5 - \frac{x}{100}\right)x = 5x - \frac{x^2}{100}$$

اور
$$C(x) = \frac{x}{5} + 500$$

اس لیے، منافع کا فنکشن $P(x)$ اس طرح دیا گیا ہے۔

$$P(x) = S(x) - C(x) = 5x - \frac{x^2}{100} - \frac{x}{5} - 500$$

یعنی
$$P(x) = \frac{24}{5}x - \frac{x^2}{100} - 500$$

یا

$$P(x) = \frac{24}{5} - \frac{x}{50}$$

اب $P'(x)=0$ دیتا ہے $x = 240$ ساتھ ہی $P''(x) = \frac{-1}{50}$، تاکہ $P''(240) = \frac{-1}{50} < 0$

اس طرح $x = 240$ اعظم قدروں کا نقطہ ہے۔ اس لیے اشیاء بنانے والا اس وقت اعظم ترین منافع کما سکتا ہے اگر وہ 240 اشیاء فروخت کرے۔

باب 6 پر مبنی متفرق مشق

1۔ تقریباً کا استعمال کر کے، ذیل میں ہر ایک کی تقریباً قدر معلوم کیجیے۔

(a) $\left(\frac{17}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$ (b) $(33)^{-\frac{1}{5}}$

2۔ دکھائیے کہ فنکشن جو کہ $f(x) = \frac{\log x}{x}$ سے دیا گیا ہے، اعظم ترین قدر رکھتا ہے جب کہ $x = e$ ہے۔

3۔ ایک مساوی الساقین مثلث جس کا اساس b مستقل ہے، کے دو برابر کے اضلاع 3 سینٹی میٹر فی سکنڈ کی شرح سے گھٹ رہے ہیں۔ رقبہ کتنی تیزی سے گھٹ رہا ہے جب کہ دونوں برابر کے اضلاع اساس کے برابر ہوں؟

4۔ منحنی $x^2 = 4y$ پر نارمل کی مساوات معلوم کیجیے جو کہ نقطہ $(1,2)$ سے ہو کر گزر رہی ہے۔

5۔ دکھائیے کہ منحنی $x = a\cos\theta + a\,\theta\sin\theta,\ y = a\sin\theta - a\theta\cos\theta$ کے کسی نقطہ θ پر نارمل صدا سے ایک مستقل فاصلے پر ہے۔

6۔ وہ وقفے معلوم کیجیے جن میں فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے

$$f(x) = \frac{4\sin x - 2x - x\cos x}{2 + \cos x}$$

(i) بڑھ رہا ہے (ii) گھٹ رہا ہے۔

7۔ وہ وقفہ معلوم کیجیے جن میں فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3},\ x \neq 0$ ہے

(i) بڑھ رہا ہے (ii) گھٹ رہا ہے۔

8۔ ایک مساوی ضلعی مثلث کا اعظم ترین رقبہ معلوم کیجیے جو کہ ناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ میں بنایا گیا ہے اور جس کا راس اکبر محور کے ایک سرے پر ہے۔

9۔ ایک ٹینک جس کا اساس مستطیل ہے اور اضلاع بھی مستطیل ہیں، اوپر سے کھلا ہوا ہے اس طرح بنایا گیا ہے تا کہ اس کی گہرائی 2 میٹر اور اور حجم 8 مکعب میٹر حجم ہے۔ اگر ٹینک کے اساس کو بنانے کا خرچ 70 روپیہ فی مربع میٹر ہے اور اس کے اضلاع کو بنانے کا خرچ 45 روپیہ فی مربع میٹر ہے۔ کم سے کم خرچیلے ٹینک کی کیا قیمت ہوگی۔

10۔ ایک دائرہ اور مربع کے احاطوں کا مجموعہ k ہے۔ جہاں k ایک مستقل ہے۔ ثابت کیجیے کہ ان کے رقبوں کا مجموعہ کم سے کم ہے جب کہ مربع کا ضلع دائرہ کے نصف قطر کے دوگنا ہے۔

11۔ ایک کھڑکی ایک مستطیل نما شکل کی ہے جس کے اوپر ایک آدھا دائری حصہ کھلا ہوا ہے۔ کھڑکی کا کل احاطہ 10 میٹر ہے۔ کھڑکی کی پیمائش معلوم کیجیے تا کہ اس کے پورے کھلنے سے عظیم روشنی اس میں داخل ہو سکے۔

12۔ ایک مثلث کے وتر پر ایک نقطہ اس کے اضلاع سے a اور b دوری پر ہے۔

دکھایئے کہ وتر کی قلیل لمبائی $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

13۔ وہ نقاط معلوم کیجیے جہاں فنکشن f جو کہ دیا گیا ہے $f(x)=(x-2)^4\ (x+1)^3$ سے رکھتا ہے۔

(i) مقامی اعظیم ترین قدریں (ii) مقامی قلیل قدریں

(iii) موڑ کا نقطہ

14۔ فنکشن f کی مطلق اعظم ترین اور قلیل قدریں معلوم کیجیے جو کہ دیا گیا ہے۔

$$f(x)=\cos^2 x+\sin x,\ x\in[0,\pi]$$

15۔ دکھایئے کہ اعظم ترین حجم والے قائم دائری مخروط جو کہ ایک r نصف قطر والے کرہ کے اندر میں بنایا جا سکتا ہے کا ارتفاع $\frac{4r}{3}$ ہے۔

16۔ مان لیجیے f ایک تفاعل ہے جو کہ $[a,b]$ میں معرف ہے، تا کہ $f'(x)>0$ ہے، تمام $x\in(a,b)$ کے لیے تب ثابت کیجیے کہ f، $[a,b]$ میں ایک بڑھتا ہوا تفاعل ہے۔

17۔ دکھایئے کہ ایک عظیم ترین حجم والے اسطوانہ کی اونچائی جو کہ ایک R نصف قطر والے کرہ میں بنایا جا سکتا ہے۔ $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ ہے۔

ساتھ ہی اعظم ترین حجم معلوم کیجیے۔

18۔ دکھایئے کہ ایک اسطوانہ جس کا حجم سب سے زیادہ ہے اور ایک h اونچائی اور نصف راسی زاویہ x جو کہ مخروط کا ایک تہائی ہے اور زیادہ سے زیادہ حجم والا اسطوانہ کے اندر بنایا جا سکتا ہے اسکی اونچائی $\frac{4}{27}\pi h^3 \tan^2 \alpha$ ہے۔

19 یا 24 سوالوں میں صحیح جواب چنیے۔

19۔ ایک اسطوانی شکل کا ٹینک جس کا نصف قطر 10 میٹر ہے گیہوں سے 314 مکعبی میٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے بھرا گیا تب گیہوں کی گہرائی اس شرح سے بڑھ رہی ہے۔

(A) $1\ m^3/h$ (B) $0.1\ m^3/h$

(C) $1.1\ m^3/h$ (D) $0.5\ m^3/h$

20۔ منحنی $x = t2 + 3t - 8, y = 2t2 - 2t - 5$ کے نقطہ $(2,-1)$ پر مماس کا سلوپ ہے۔

(A) $\frac{22}{7}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{7}{6}$ (D) $\frac{-6}{7}$

21۔ منحنی $y^2 = 4x$ پر ایک خط $y = mx + 1$ مماس ہے اگر m کی قدر ہے۔

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) $\frac{1}{2}$

22۔ منحنی $2y + x^2 = 3$ کے نقطہ $(1,1)$ پر نارمل ہے۔

(A) $x + y = 0$ (B) $x - y = 0$

(C) $x + y + 1 = 0$ (D) $x - y = 0$

23۔ منحنی $x^2 = 4y$ پر نارمل نقطہ $(1,2)$ سے گزر رہا ہے، یہ ہے۔

(A) $x + y = 3$ (B) $x - y = 3$

(C) $x + y = 1$ (D) $x - y = 1$

24۔ منحنی $9y^2 = x^3$ پر نقاط، جہاں نارمل منحنی کے ساتھ برابر مقطوعہ بناتا ہے، محور یہ ہیں۔

(A) $\left(4, \pm\frac{8}{3}\right)$ (B) $\left(4, \frac{-8}{3}\right)$

ساتھ ہی اعظم ترین حجم معلوم کیجیے۔

18۔ دکھایئے کہ ایک اسطوانہ جس کا حجم سب سے زیادہ ہے اور ایک h اونچائی اور نصف راسی زاویہ x جو کہ مخروط کا ایک تہائی ہے اور زیادہ سے زیادہ حجم والا اسطوانہ کے اندر بنایا جاسکتا ہے اسکی اونچائی $\frac{4}{27}\pi h^3 \tan^2 \alpha$ ہے۔

19 یا 24 سوالوں میں صحیح جواب چنیے۔

19۔ ایک اسطوائی شکل کا ٹینک جس کا نصف قطر 10 میٹر ہے گیہوں سے 314 مکعبی میٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے بھرا گیا تب گیہوں کی گہرائی اس شرح سے بڑھ رہی ہے۔

(A) $1\ m^3/h$ (B) $0.1\ m^3/h$

(C) $1.1\ m^3/h$ (D) $0.5\ m^3/h$

20۔ منحنی $x = t2 + 3t - 8, y = 2t2 - 2t - 5$ کے نقطہ $(2,-1)$ پر مماس کا سلوپ ہے۔

(A) $\frac{22}{7}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{7}{6}$ (D) $\frac{-6}{7}$

21۔ منحنی $y^2 = 4x$ پر ایک خط $y = mx + 1$ مماس ہے اگر m کی قدر ہے۔

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) $\frac{1}{2}$

22۔ منحنی $2y + x^2 = 3$ کے نقطہ $(1,1)$ پر نارمل ہے۔

(A) $x + y = 0$ (B) $x - y = 0$

(C) $x + y + 1 = 0$ (D) $x - y = 0$

23۔ منحنی $x^2 = 4y$ پر نارمل نقطہ $(1,2)$ سے گزر رہا ہے، یہ ہے۔

(A) $x + y = 3$ (B) $x - y = 3$

(C) $x + y = 1$ (D) $x - y = 1$

24۔ منحنی $9y^2 = x^3$ پر نقاط، جہاں نارمل منحنی کے ساتھ برابر مقطوعہ بناتا ہے، محور یہ ہیں۔

(A) $\left(4, \pm\frac{8}{3}\right)$ (B) $\left(4, \frac{-8}{3}\right)$

(C) $\left(4, \pm\frac{3}{8}\right)$ (D) $\left(\pm 4, \frac{3}{8}\right)$

خلاصہ (Summary)

- اگر ایک مقدار y دوسری مقدار x کے ساتھ بڑھتی ہے جو اس اصول $y = f(x)$ کو مطمئن کرتی ہے، تب $\frac{dy}{dx}$ (یا $f'(x)$) y کی x کے ساتھ شرح تبدیلی کو ظاہر کرتا ہے اور $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ (یا $f'(x_0)$) y کی شرح تبدیلی x کے ساتھ کو ظاہر کرتی ہے $x = x_0$ پر۔
- اگر دو متغیر x اور y ایک دوسرے متغیر t کی نسبت میں بدل رہے ہیں، یعنی، اگر $x = f(t)$ اور $y = g(t)$ ہے تب زنجیری اصول سے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} \text{ اگر } \frac{dx}{dt} \neq 0$$

- ایک فنکشن f ہے۔

(a) وقفہ (a,b) پر بڑھ رہا ہے اگر $x_1 < x_2$ in $(a, b) \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ تمام $x_1, x_2 \in (a, b)$ کے لیے

متبادل کے طور پر، اگر $f'(x) \ge 0$ ہے تمام (a, b)، x کے لیے یا شامل ہے (a,b) میں

(b) (a,b) پر گھٹ رہا ہے، اگر،

$x_1 < x_2$ in$(a, b) \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ تمام کے لیے $x_1, x_2 \in (a, b)$

(c) مستقل ہے (a,b) میں اگر $f(n)=c$ تمام $x\in(a,b)$ کے لیے جہاں c ایک مستقلہ ہے۔

- مماس کی مساوات نقطہ (x_0, y_0) پر منحنی $y = f(x)$ کے لیے اس طرح دی گئی ہے۔

$$y - y_0 = \left.\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0, y_0)} (x - x_0)$$

- اگر $\frac{dy}{dx}$، نقطہ (x_0, y_0) پر موجود نہیں ہے، مماس اس نقطہ پر y–محور پر متوازی ہے اور اس کی مساوات $x = x_0$
- اگر مماس ایک منحنی $y = f(x)$ کے لیے $x = x_0$ پر محور x–محور کے متوازی ہے، تب $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0} = 0$ ہے۔

نارمل کی مساوات منحنی $y = f(x)$ کے لیے نقطہ (x_0, y_0) پر اس طرح دی گئی ہے۔

$$y - y_0 = \frac{-1}{\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0, y_0)}}(x - x_0)$$

- اگر $\frac{dy}{dx}$، نقطہ (x_0, y_0) پر صفر ہے تب نارمل کی مساوات $x = x_0$ ہے۔
- اگر نقطہ $\frac{dy}{dx}$ (x_0, y_0) پر موجود نہیں ہے، تب نارمل x–محور کے متوازی ہے اور اس کی مساوات $y = y_0$ ہے
- مان لیجیے $y = f(x)$ ہے، Δx، x میں ایک چھوٹا اضافہ ہے اور Δy، y میں x میں اضافہ کے مطابق، یعنی $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ تب dy دیا ہے

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x \text{ یا } dy = f'(x)dx$$

- Δy کی ایک اچھا تقرب ہے جب کہ $dx = \Delta x$ اضافی طور پر چھوٹا ہے اور ہم اسے $dy \approx \Delta y$ سے ظاہر کرتے ہیں۔
- فنکشن f کے علاقہ میں ایک نقطہ c جہاں یا تو $f'(c) = 0$ ہے یا f تفرق پذیر نہیں ہے، f کا فاصل نقطہ کہلاتا ہے۔
- **پہلی مشتق جانچ** مان لیجیے f ایک فنکشن ہے جو کہ وقفہ I پر بیان کیا گیا ہے۔ مان لیجیے f وقفہ I میں فاصل نقطہ C پر مسلسل ہے۔ تب

(i) جیسے جیسے c، e کے ذریعے بڑھتا ہے $f'(x)$ اپنا نشان مثبت سے منفی میں بدلتا ہے یعنی $f'(x) > 0$، ہے ہر ایک نقطہ پر جو کہ c اور c کے بائیں بہت قریب ہے اور $f'(x) < 0$ ہے ہر ایک نقطہ پر جو کہ c اور c کے دائیں بہت قریب ہے، تب c مقامی اعظم ترین قدروں کا نقطہ ہے۔

(ii) اگر $f'(x)$ اپنا نشان مثبت منفی میں بدلتا ہے جس طرح x، c کی ذریعہ سے آگے بڑھتا ہے، یعنی اگر $f'(x)<0$ ہے ہر نقطہ پر جو کہ c اور C کے بائیں کافی قریب ہے اور $f'(x)>0$ ہے ہر ایک نقطہ ہر جو کہ c اور e کے دائیں کافی قریب ہے، تب e مقامی قلیل قدروں کا نقطہ ہے۔

(iii) اگر $f'(x)$ اپنا نشان نہیں بدلتا جیسے جیسے x کی کے ذریعہ سے بڑھتا ہے، تب C نا تو مقامی اعظم ترین قدروں کا نقطہ ہے اور نا ہی مقامی قلیل قدروں کا۔ اس طرح کے نقطے کو موڑ کا نقطہ کہتے ہیں۔

- **دوسری مشتق جانچ** مان لیجیے f ایک فنکشن ہے وقفہ I پر اور $c \in I$ ۔ مان لیجیے f، c پر دو بار تفرق پذیر ہے۔ تب

(i) $x = c$ ایک مقامی اعظم ترین قدروں کا نقطہ ہے اگر $f'(c) = 0$ اور $f''(c) < 0$ کے۔ اس کیس میں $f(c)$، f کی مقامی اعظم ترین قدر ہے۔

(ii) $x = c$ ایک مقامی قلیل قدروں کا نقطہ ہے اگر $f'(c) = 0$ اور $f''(c) > 0$ کے۔

اس کیس میں $f(c)$، f کی مقامی قلیل قدر ہے۔

(iii) جانچ فیل ہو جاتی ہے اگر $f'(c) = 0$ اور $f''(c) = 0$

اس کیس میں، ہم پہلی مشتق جانچ کی طرف واپس جاتے ہیں اور معلوم کرتے ہیں کہ کیا C اعظم ترین قدروں کا نقطہ ہے، قلیل قدروں کا نقطہ ہے یا ایک موڑ کا نقطہ ہے۔

- مقامی اعظم ترین قدروں اور/ یا مقامی قلیل قدروں کو معلوم کرنے کے لئے کام کرنے کا اصول

قدم 1: وقفہ I میں f کے تمام فاصل نقاط معلوم کیجئے یعنی x. معلوم کیجئے جہاں یا تو $f'(x) = 0$ ہے یا f تفرق پذیر نہیں ہے۔

قدم 2: وقفہ کے سرے کے نقاط معلوم کیجیے۔

قدم 3: ان تمام نقطوں پر (جو قدم 1 اور 2 میں لئے گئے ہیں) f کی قدریں معلوم کیجیے۔

قدم 4: قدم 3 میں حساب لگائی گئی قدروں میں سے اعظم ترین اور قلیل قدروں کی پہچان کیجیے۔ یہ اعظم ترین قدر f کی مطلق عظیم قدر ہوگی اور قلیل قدر f کی مطلق قلیل قدر ہوگی۔