5259CH04

باب 4

مقطعہ
(DETERMINANTS)

❖’تمام ریاضی کی سچائیاں ایک دوسرے سے تعلق رکھتی ہیں اورحالات پر مبنی ہیں-سی-پی-اسٹین-مٹز❖

4.1 تعارف

پی۔ایس۔لیپلیس

پچھلے باب میں ہم ماترس اور ماترس کے الجبرا کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ہم یہ بھی پڑھ چکے ہیں کہ الجبری مساوات کے نظام کو ماترس کی شکل میں پیش کیا جاسکتا ہے۔اس کا مطلب ہے اس طرح کی خطی مساواتوں کا نظام۔

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

اس طرح بھی دکھایاجا سکتا ہے ۔ $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ اب اس مساواتوں کے نظام کا ایک ہی حل ہے یا نہیں۔کا پتہ عدد $a_1\ b_2 - a_2\ b_1$ سے نکالا جاسکتا ہے(اسے یاد کیجیۓ کہ اگر $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ یا، $a_1\ b_2 - a_2\ b_1 \neq 0$، تب خطی مساواتوں کا صرف ایک حل ہے)عدد $a_1\ b_2 - a_2\ b_1$ جو کہ حل کی یکتائی کو بتاتا ہے ماترس $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ سے جڑا ہوا ہے اور A کا مقطعہٗ (ڈیٹرمینینٹ) کہلاتا ہے۔یا det A۔ڈیٹرمینینٹ کا بہت زیادہ استعمال انجینئرنگ،سائنس،اکنامکس،سوشل سائنس وغیرہ میں ہوتا ہے۔

اس باب میں ہم،ڈیٹرمینینٹ کا مطالعہ حقیقی اندراج کے ساتھ تین درجہ تک کریں گے ساتھ ہی ہم ڈیٹرمینینٹ کی بہت سی خصوصیات کا مطالعہ کریں گے،صغیرے(minors)،ہم ضربی اور ڈیٹرمینینٹ کا استعمال مثلث کا رقبہ دریافت کرنے میں،ایک مربع ماترس کے شریک اور معکوس دریافت کرنے میں،خطی مساواتوں کے نظام کی ہم آہنگی اور بے آہنگی معلوم کرنے میں اور خطی مساواتوں کے حل 2 یا تین متغیر میں ماترس کے معکوس کا استعمال کرتے ہیں۔

4.2 مقطعہ

n ترتیب والی ہر ماترس $A = [a_{ij}]$ کو ہم ایک عدد (حقیقی یا ملتف) (real or complex) سے منسوب کر سکتے ہیں جو اس مربع ماترس A کا مقطعہ یا ڈیٹرمینینٹ کہلاتا ہے۔ جہاں $a_{ij} = (i, j)^{th}$ ماترس A کا (i,j)واں عنصر ہے۔ اسے ایک فنکشن کی طرح بھی پیش کیا جا سکتا ہے جو ہر مربع ماترس کو ایک منفرد عدد (حقیقی یا ملتف) سے منسوب کرتا ہے۔ اگر M تمام مربع ماترس کا سیٹ ہے، اور K اعداد (حقیقی یا ملتف) کا سیٹ ہے تب $f : M \to K$ کو $f(A) = k$ سے معرف کیا جا سکتا ہے، جہاں $A \in M$ اور $k \in K$، تب $f(A)$ کو A کا ڈیٹرمنینٹ کہا جاتا ہے۔ اسے $|A|$ یا detA یا Δ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ہے، تب A کا ڈیٹرمنینٹ $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det(A)$

ریمارکس

(i) ماترس A کے لیے $|A|$ کو ماترس A کا مقطعہ پڑھا جاتا ہے نا کہ A کا مقیاس

(ii) صرف مربع ماترس ہی ڈیٹرمنینٹس ہوتی ہیں۔

4.2.1 ایک رتبہ والی ماترس کا ڈیٹرمنینٹ

مان لیجیے $A=[a]$ ایک رتبہ '1' کی ماترس ہے، تب A کا ڈیٹرمنینٹ a کے برابر بیان کیا جاتا ہے۔

4.2.2 ایک دو رتبہ والی ماترس کا ڈیٹرمنینٹ

مان لیجیے $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ایک رتبہ 2×2 کی ماترس ہے۔

تب A کے مقطعہ کی تعریف اس طرح بیان ہوتی ہے۔

$$\det(A) = |A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

مثال 1 $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ دریافت کیجیے

حل ہمارے پاس ہے

مثال 2 $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 4(-1) = 4 + 4 = 8.$

مثال 2 $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix}$ دریافت کیجیے

حل ہمارے پاس ہے

$$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix} = x\,(x) - (x+1)\,(x-1) = x^2 - (x^2-1) = x^2 - x^2 + 1 = 1$$

4.2.3 ایک تین رتبہ والی ماترس کا مقطعہ

تین ترتیب والی ماترس کا ڈیٹرمنینٹ دو ترتیب والی ماترس کے ڈیٹرمنینٹ کی طرح معرف کر کے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اسے ڈیٹرمنینٹ کا پھیلاؤ ایک قطار کے ساتھ (یا ایک کالم کے ساتھ) کہا جاتا ہے۔ تین ترتیب والے ڈیٹرمنینٹ کے پھیلاؤ کے چھ طریقے ہیں، ہر ایک تین قطاروں (R_1, R_2 اور R_3) کے مطابق اور تین کالموں (C_1, C_1 اور C_3) یکساں قدریں دے کر جیسا کہ ذیل میں رکھا گیا ہے۔ $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ ایک مربع ماترس کو ملاحظہ فرمائیں۔

یعنی
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

پہلی قطار R_1 کے ساتھ پھیلاؤ سے

قدم 1 R_1–1 کے پہلے عنصر a_{11} کو $(-1)^{(1+1)}$ سے اور $|A|$ کی پہلی قطار R_1 اور پہلے کالم C_1 کے تمام عناصر کو حذف کرنے کے بعد حاصل شدہ دوسرے رتبہ والی مقطعہ سے ضرب کیجیے

یعنی $(-1)^{1+1}\, a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

قدم 2 R_1 کے دوسرے عنصر a_{12} کو $(-1)^{1+2}$ اور $|A|$ کی پہلی قطار (R_1) دوسرے کالم (C_2) کے تمام عناصر کو حذف کرنے کے بعد حاصل شدہ دوسرے رتبہ کے ڈیٹرمینٹ سے ضرب کیجیے

یعنی $(-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

قدم 3 R_1 کے تیسرے عنصر a_{13} کو $(-1)^{1+3}$ سے اور |A| کی پہلی قطار R_1 اور تیسرے کالم (C_3) کے تمام عناصر کو حذف کرنے کے بعد حاصل شدہ دوسرے رتبہ کے ڈیٹرمینٹ سے ضرب کیجیے

یعنی $(-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

قدم 4 اب ڈیٹرمینٹ کا پھیلاؤ، |A| کو، اس کا مطلب ہے، اقدام 1، 2 اور 3 میں حاصل شدہ ارکان کے مجموعہ کے طور لکھا جا سکتا ہے جیسا کہ اوپر دیا گیا ہے۔

$$\det A = |A| = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

یا

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})$$
$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{31}a_{22} \qquad ...(1)$$

نوٹ نوٹ ہم چاروں اقدام کو ایک ساتھ لاگو کریں گے۔

دوسری قطار (R_2) کے ساتھ پھیلاؤ

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

کے ساتھ پھیلاؤ پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$|A| = (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+ (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})$$
$$- a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})$$
$$|A| = -a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{31}a_{13} - a_{23}a_{11}a_{32}$$
$$+ a_{23}a_{31}a_{12}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{31}a_{22} \quad \ldots (2)$$

پہلے کالم (C_1) کے ہمراہ پھیلاؤ (Expansion along first column)

$$|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \boldsymbol{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

C_1 کے ہمراہ پھیلانے پر،ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$|A| = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{31}a_{22} \quad \ldots (3)$$

صاف طور پر، |A| کی قدریں (1)، اور (3) میں برابر ہیں۔ یہ پڑھنے والے کے لیے ایک مشق کے طور پر چھوڑ دیا گیا ہے کہ وہ یہ دکھائیے کہ |A| کی قدریں جب اسے R_3، C_2 اور C_3 کے ساتھ پھیلایا جائے تو وہ (2)، (1) اور (3) کی قدروں کے برابر ہیں۔

اس کا مطلب ہے، ایک ڈیٹرمنینٹ کو کسی بھی قطار یا کالم کے ساتھ پھیلانے پر یکساں قدر حاصل ہوتی ہے۔

ریمارکس

(i) آسانی کے لیے، ہم ڈیٹرمنینٹ کو اس قطار یا کالم کے ساتھ پھیلاتے ہیں جس میں صفر کی تعداد زیادہ سے زیادہ ہو۔

(ii) $(-1)^{i+j}$ سے ضرب کرنے کی بجائے، پھیلاتے وقت 1+ یا 1– سے ضرب کر سکتے ہیں جس کا انحصار اس پر ہے کہ

(i+j) جفت ہے یا طاق ہے۔

(iii) مان لیجیے $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ہے۔ تب، یہ دکھانا آسان ہے کہ $A = 2B$ ساتھ ہی $|A| = 0 - 8 = -8$

اور $|B| = 0 - 2 = -2$۔

مشاہدہ کیجیے کہ $|A| = 4(-2) = 2^2|B|$ یا $|A| = 2^n|B|$، جہاں $n = 2$ مربع ماترس A اور B کا رتبہ 2 ہے۔

عام طور پر اگر $KB = A$ جہاں A اور B ترتیب کی مربع ماترس ہیں۔ تب $|A| = K^n|B|$ جہاں $n=1,2,3$ ہے۔

مثال 3 مقطعہ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل غور کیجیے کہ تیسرے کالم میں دو اندراج صفر ہیں۔ اس لیے تیسرے کالم (C_3) کے ہمراہ پھیلانے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-1-12) - 0 + 0 = -52$$

مثال 4 $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \\ -\sin\alpha & 0 & \sin\beta \\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0 \end{vmatrix}$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل R_1 کے ہمراہ پھیلانے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = 0\begin{vmatrix} 0 & \sin\beta \\ -\sin\beta & 0 \end{vmatrix} - \sin\alpha\begin{vmatrix} -\sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & 0 \end{vmatrix} - \cos\alpha\begin{vmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\sin\beta \end{vmatrix}$$

$$= 0 - \sin\alpha\,(0 - \sin\beta\cos\alpha) - \cos\alpha\,(\sin\alpha\sin\beta - 0)$$

$$= \sin\alpha\sin\beta\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha\sin\beta = 0$$

مثال 5 x کی وہ قدریں معلوم کیجیے جن کے لیے $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

حل ہمارے پاس ہے $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

یعنی $3 - x^2 = 3 - 8$

یعنی $x^2 = 8$

$x = \pm 2\sqrt{2}$

مشق 4.1

مشق 1 اور 2 میں مقطعہ کا حساب لگائیے۔

1۔ $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$

2۔ (i) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} x^2-x+1 & x-1 \\ x+1 & x+1 \end{vmatrix}$

3۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ہو، تب دکھائیے کہ $|2A| = 4|A|$

4۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ہے، دکھائیے کہ $|3A| = 27|A|$

5۔ مقطعہ کی قدر معلوم کیجیے۔

(i) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ (iv) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

6۔ اگر $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -9 \end{vmatrix}$، $|A|$ معلوم کیجیے

7۔ x کی قدریں معلوم کیجیے، اگر

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$

4.3 مقطعہ کی خصوصیات

پچھلے حصے میں ہم نے پڑھا ہے کہ کس طرح ڈیٹرمنینٹس کو پھیلایا جاتا ہے۔ اس حصے میں ہم ڈیٹرمنینٹس کی کچھ خصوصیات کے

بارے میں پڑھیں گے جو اس کی قدر کا اندازہ لگانے کو آسان کردے گا جو زیادہ سے زیادہ صفر اعداد ایک قطار یا کالم میں حاصل کرنے سے ہوتا ہے۔ یہ خصوصیات کسی بھی رتبہ والے مقطعہ کے لیے ہیں۔ حالانکہ، ہم اپنے آپ کو صرف '3' ترتیب والے مقطعہ تک ہی محدود رکھیں گے۔

خصوصیت 1 مقطعہ کی قدر نہیں بدلتی اگر قطاروں اور کالموں کو آپس میں بدل دیا جائے۔

تصدیق کرنا مان لیجیے
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

پہلی قطر کے ساتھ پھیلانے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$
$$= a_1 \; (b_2 \; c_3 - b_3 \; c_2) - a_2 \; (b_1 \; c_3 - b_3 \; c_1) + a_3 \; (b_1 \; c_2 - b_2 \; c_1)$$

Δ کی قطاروں اور کالموں کو آپس میں بدلنے پر، ہمیں ڈیٹرمنینٹ حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

کو پہلے کالم کے ساتھ پھیلانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta_1 = a_1 \; (b_2 \; c_3 - c2 \; b_3) - a_2 \; (b_1 \; c_3 - b_3 \; c_1) + a_3 \; (b_1 \; c_2 - b_2 \; c_1)$$

اس لیے $\Delta = \Delta_1$

ریمارک اوپر کی خصوصیت یہ نکلتا ہے کہ اگر A ایک مربع ماترس ہے، تب det(A)=det (A–) جہاں A=A– کا پلٹاؤ (transpose)

> **نوٹ** اگر R_i=*i*th قطار اور *i*th=C*i* کالم، تب ہم قطار اور کالموں کو آپس میں بدلنے کے لئے علامتی طور پر $C_i \leftrightarrow R_i$
>
> ہم اوپر دی ہوئی خصوصت کی ذیل مثال سے تصدیق کریں گے۔

مثال 6 $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ کے لیے خصوصیت کی تصدیق کیجیے۔

حل مقطعہ کو پہلی قطار کے ساتھ پھیلانے پر ہمارے پاس ہے

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(0-20) + 3\,(-42-4) + 5\,(30-0)$$

$$= -40 - 138 + 150 = -28$$

قطاروں اور کالموں کو آپس میں بدلنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & -7 \end{vmatrix}$$ پہلے کالم کے ساتھ پھیلانے پر

$$= 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(0-20) + 3\,(-42-4) + 5\,(30-0)$$

$$= -40 - 138 + 150 = -28$$

صاف طور پر

اس طرح، خصوصیت '1' کی تصدیق ہوگئی ہے

خصوصیت 2 اگر ایک مقطعہ کی کوئی بھی دو قطاریں (یا کالم) آپس میں بدل دیئے جائیں۔ تب مقطعہ کی علامت بدل جاتی ہیں۔

تصدیق، مان لیجیے، $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

پہلی قطار کے ساتھ پھیلانے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta = a_1\,(b_2\,c_3 - b_3\,c_2) - a_2\,(b_1\,c_3 - b_3\,c_1) + a_3\,(b_1\,c_2 - b_2\,c_1)$$

پہلی اور تیسری قطاروں کو آپس میں بدلنے پر، حاصل شدہ نیا مقطعہ دیا گیا ہے۔

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

تیسری قطار کے ساتھ پھیلانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta_1 = a_1(c_2\ b_3 - b_2\ c_3) - a_2(c_1 b_3 - c_3 b_1) + a_3(b_2\ c_1 - b_1 c_2)$$
$$= -[a_1(b_2\ c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)]$$

صاف طور پر $\Delta_1 = -\Delta$

اس طرح ہم نتیجے کی تصدیق کسی بھی دو کالموں کو آپس میں بدلنے سے کر سکتے ہیں۔

نوٹ ہم قطاروں کے آپس میں بدلنے کو $R_i \leftrightarrow R_j$ سے دکھا سکتے ہیں اور آپس میں کالموں کے بدلنے کو $C_i \leftrightarrow C_j$ سے

مثال 7 $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ کے خصوصیت '2' کی تصدیق کیجیے۔

حل (مثال 6 کو دیکھئے) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -28$

اور R_3 قطاروں کو آپس میں بدلنے پر یعنی $R_2 \leftrightarrow R_3$ ہمارے پاس ہے

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & -7 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

پہلی قطار کے ساتھ مقطعہ Δ_1 کو پھیلانے پر ہمارے پاس ہے

$$\Delta_1 = 2\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 2(20-0) + 3(4+42) + 5(0-30)$$
$$= 40 + 138 - 150 = 28$$

صاف طور پر $\Delta_1 = -\Delta$

اس طرح خصوصیت '2' کی تصدیق ہوگئی ہے۔

خصوصیت 3 اگر کسی بھی ایک مقطعہ کی دو قطاریں (یا کالم) بالکل ایک جیسی ہیں (تمام نظیری عناصر ایک ہوں)، تب مقطعہ کی قدر صفر ہوتی ہے۔

ثبوت اگر ہم ایک مقطعہ Δ کے بالکل ایک جیسی قطاروں (یا کالموں) کو آپس میں بدلیں، تب Δ نہیں بدلے گا۔ حالانکہ خصوصیت 2 سے یہ نکلتا ہے کہ Δ اپنی علامت بدل چکا ہے۔

اس لیے $\Delta = -\Delta$

یا $\Delta = 0$

ہمیں اوپر دی ہوئی خصوصیت کی تصدیق ایک مثال سے کرنی چاہیے۔

مثال 8 $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ کی قدر کا اندازہ لگایئے۔

حل پہلی قطار کے ہمراہ پھیلانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta = 3(6-6) - 2(6-9) + 3(4-6)$$
$$= 0 - 2(-3) + 3(-2) = 6 - 6 = 0$$

یہاں R_1 اور R_3 بالکل ایک ہیں۔

خصوصیت 4 اگر ایک مقطعہ کی ایک قطار (یا ایک کالم) کا ہر عنصر ایک مستقل k سے ضرب کیا جائے، تب اس کی قدر بھی k سے ضرب ہو جاتی ہے

تصدیق مان لیجیے $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

اور Δ_1 وہ مقطعہ ہے جو پہلی قطار کے عناصر کو k سے ضرب کرنے پر حاصل ہوا ہے۔

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} k\,a_1 & k\,b_1 & k\,c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

پہلی قطار کے ہمراہ پھیلانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta_1 = k\, a_1\,(b_2\, c_3 - b_3\, c_2) - k\, b_1\,(a_2\, c_3 - c_2\, a_3) + k\, c_1\,(a_2\;\, b_3 - b_2\, a_3)$$
$$= k\,[a_1\,(b_2\, c_3 - b_3\, c_2) - b_1\,(a_2\, c_3 - c_2\, a_3) + c_1\,(a_2\, b_3 - b_2\, a_3)]$$

اس طرح
$$\begin{vmatrix} k\,a_1 & k\,b_1 & k\,c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ریمارکس

(i) اس خصوصیت کی بنا پر ہم ایک دیئے ہوئے مقطعہ کی کسی بھی قطار یا کالم سے کوئی بھی مشترک اجزائے ضربی نکال سکتے ہیں۔

(ii) اگر ایک ڈیٹرمینینٹ کی کوئی بھی دو قطاریں (یا کالم) کے نظیری عناصر ایک تناسب میں ہوں (یکساں نسبت میں ہیں)، تب اس کی قدر صفر ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ k\,a_1 & k\,a_2 & k\,a_3 \end{vmatrix} = 0$$ (R_1 اور R_2 قطاریں تناسب میں ہے)

مثال 9 $\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ کی قدر معلوم کیجیے

حل نوٹ کیجیے کہ
$$\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6(17) & 6(3) & 6(6) \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 17 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

(خصوصیت 3 اور 4 کا استعمال کرکے)

خصوصیت 5 اگر ایک مقطعہ کی ایک قطار یا کالم کے کچھ یا تمام عناصر دو (یا زیادہ) ارکانوں کے مجموعہ کے طور پر دکھائیں جائیں۔ تب مقطعہ کو دو (یا زیادہ) مقطعہ کے مجموعہ کے طور پر دکھایا جاسکتا ہے۔

مثال کے طور پر،
$$\begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2+\lambda_2 & a_3+\lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

تصدیق
$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2+\lambda_2 & a_3+\lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

مقطعہ کو پہلی قطار کے ہمراہ کھولنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}\Delta &= (a_1+\lambda_1)(b_2c_3-c_2b_3)-(a_2+\lambda_2)(b_1c_3-b_3c_1) \\ &\quad +(a_3+\lambda_3)(b_1c_2-b_2c_1) \\ &= a_1(b_2c_3-c_2b_3)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1) \\ &\quad +\lambda_1(b_2c_3-c_2b_3)-\lambda_2(b_1c_3-b_3c_1)+\lambda_3(b_1c_2-b_2c_1)\end{aligned}$$

(ارکان کی جگہ بدلنے پر)

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \text{R.H.S.}$$

اسی طرح ہم خصوصیت '5' کی تصدیق دوسری قطاروں اور کالموں کے لئے بھی کر سکتے ہیں۔

مثال 10 دکھایئے کہ
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

حل ہمارے پاس ہے
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

خصوصیت 5 کی بنا پر

$$= 0 + 0 = 0$$ (خصوصیت 3 اور 4 کا استعمال کرکے۔)

خصوصیت 6 اگر ایک مقطعہ کی کسی بھی قطار یا کالم کے ہر ایک عنصر میں دوسری قطار (یا کالم) کے نظیری مساوی اضعاف میں جمع کیا جائے، تب مقطعہ کی قدر نہیں بدلتی یعنی مقطعہ کی قدر وہی رہتی ہے اگر ہم $R_i \leftrightarrow R_i + kR_j$ یا $C_i \leftrightarrow C_i + kC_j$ لاگو کریں گے۔

تصدیق

مان لیجیے
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ اور } \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1+kc_1 & a_2+kc_2 & a_3+kc_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

جہاں Δ_1 عمل $R_1 \to R_1 + kR_3$ سے حاصل ہوا ہے۔

یہاں، ہم نے تیسری قطار (R_3) کے عناصر کو متقلہ k سے ضرب کیا ہے اور پھر پہلی قطار (R_1) کے مطابق عناصر کو جمع کیا گیا ہے۔

علاقائی طور پر، ہم اس عمل کو اس طرح لکھتے ہیں

اب دوبارہ $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kc_1 & kc_2 & kc_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ (خصوصیت 5 کا استعمال کرنے پر)

$=\Delta+0$ (کیونکہ R_1 اور R_3 تناسب میں ہیں)

اس لیے $\Delta = \Delta_1$

ریمارکس

(i) اگر Δ_1 وہ مقطعہ ہے جو $R_i \to kR_i$ یا $C_i \to kC_i$ مقطعہ Δ پر لاگو کرنے کے بعد حاصل ہوا ہے، تب $\Delta_1 = k\Delta$

(ii) اگر ایک سے زیادہ عمل $R_i \to R_i + kR_j$ کی طرح ایک قدم میں کیا گیا ہے، اس بات پر دھیان دینا ہوگا کہ جو قطار ایک عمل میں اثر انداز ہوئی ہے وہ دوسرے عمل میں استعمال نہیں ہونی چاہئے۔ اس طرح کا ریمارک کالم کے عمل میں لاگو ہوتا ہے۔

مثال 11 ثابت کیجیے کہ $$\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix} = a^3$$

حل دیئے ہوئے مقطعہ پر عمل $R_2 \to R_2 + 2R_1$ اور $R_3 \to R_3 + 3R_1$ لاگو کرنے پر ہمارے پاس ہے۔

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix}$$

اب $R_3 \to R_3 + 3R_2$ لاگو کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

C_1 کے ہمراہ پھیلانے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = a\begin{vmatrix} a & 2a+b \\ 0 & a \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$= a\,(a^2 - 0) = a\,(a^2) = a^3$$

مثال 12 بغیر پھیلاؤ کے، ثابت کیجیے کہ

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

حل $R_1 \to R_1 + R_2$ کو Δ پر لاگو کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

کیونکہ R_1 اور R_3 کے عناصر میں تناسب ہے، اس لیے $\Delta = 0$

مثال 13 حساب لگائیے۔

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

حل $R_2 \to R_2 - R_1$ اور $R_3 \to R_3 - R_1$ کو لاگو کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & c\,(a-b) \\ 0 & c-a & b\,(a-c) \end{vmatrix}$$

R_2 اور R_3 سے بالترتیب اجزائے ضربی $(b-a)$ اور $(c-a)$ کو مشترک لینے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta = (b-a)\,(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix}$$

(پہلے کالم کے ساتھ پھیلانے پر) $= (b-a)\,(c-a)\,[(-b+c)]$

$$= (a-b)\,(b-c)\,(c-a)$$

مثال 14 ثابت کیجیے کہ $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$

حل مان لیجیے کہ $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$

Δ پر $R_1 \to R_1 - R_2 - R_3$ کو لاگو کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2c & -2b \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

R_1 کے ساتھ پھیلانے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta = 0\begin{vmatrix} c+a & b \\ c & a+b \end{vmatrix} - (-2c)\begin{vmatrix} b & b \\ c & a+b \end{vmatrix} + (-2b)\begin{vmatrix} b & c+a \\ c & c \end{vmatrix}$$

$$= 2\,c\,(a\,b + b^2 - bc) - 2\,b\,(b\,c - c^2 - ac)$$

$$= 2\,a\,b\,c + 2\,cb^2 - 2\,bc^2 - 2\,b^2c + 2\,bc^2 + 2\,abc$$

$$= 4\,abc$$

مثال 15 اگر x, y, z مختلف ہیں اور $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$ ہے،

تو دکھایئے کہ، $1 + xy = 0$

حل ہمارے پاس ہے $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix}$

(خصوصیت 5 کا استعمال کرنے پر) $= \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{vmatrix}$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} + xyz \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$ (پہلے $C_3 \leftrightarrow C_2$ کا استعمال کرنے پر اور پھر $C_1 \leftrightarrow C_2$ کا)

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} (1+xyz)$$

$$= (1+xyz) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$ ($R_2 \to R_2 - R_1$ اور $R_3 \to R_3 - R_1$ کا استعمال کرنے پر)

R_2 سے $(y-x)$ اور R_3 سے $(z-x)$ مشترک اجزائے ضربی نکالنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta = (1+xyz)\,(y-x)\,(z-x) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & 1 & z+x \end{vmatrix}$$

$$= (1+xyz)\,(y-x)\,(z-x)\,(z-x)$$ (C_1 کے ساتھ پھیلانے پر)

کیونکہ $\Delta = 0$ اور تمام x، y، z مختلف ہیں یعنی $x-y \neq 0$، $y-z \neq 0$، $z-x \neq 0$، ہمیں حاصل ہوتا ہے $1+xyz=0$

مثال 16 دکھایئے کہ

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = abc+bc+ca+ab$$

حل R_1، R_2 اور R_3 سے مشترک اجزائے ضربی a، b، c باہر نکالنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{L.H.S.} = abc \begin{vmatrix} \frac{1}{a}+1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ لاگو کرنے پر ہمارے پاس

$$\Delta = abc\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

اب $C_2 \to C_2 - C_1$ ، $C_3 \to C_3 - C_1$ کولاگو کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left[1(1-0)\right]$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = abc+bc+ca+ab = \text{R.H.S.}$$

نوٹ اس کے متبادل $C_1 \to C_1 - C_2$ اور $C_3 \to C_3 - C_2$ کو لاگو کرنے پر، اس کے بعد $C_1 \to C_1 - aC_2$ لاگو کیجیے۔

مشق 4.2

مقطعہ کی خصوصیت کا استعمال کر کے اور مشق 1 تا 7 کو بغیر پھیلائے ہوئے، ثابت کیجیے کہ۔

1. $\begin{vmatrix} x & a & x+a \\ y & b & y+b \\ z & c & z+c \end{vmatrix} = 0$

2. $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$

3. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 65 \\ 3 & 8 & 75 \\ 5 & 9 & 86 \end{vmatrix} = 0$

4. $\begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix} = 0$

5. $\begin{vmatrix} b+c & q+r & y+z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$

7. $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

مشق 8 تا 14 میں مقطعہ کی خصوصیات کا استعمال کر کے، دکھایئے کہ

8. (i) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

9. $\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

10. (i) $\begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} = (5x+4)(4-x)^2$

(ii) $\begin{vmatrix} y+k & y & y \\ y & y+k & y \\ y & y & y+k \end{vmatrix} = k^2(3y+k)$

11. (i) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

(ii) $$\begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & y \\ z & x & z+x+2y \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3$$

12. $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-x^3)^2$$

13. $$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$$

14. $$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2$$

15 تا 16 مشقوں میں صحیح جواب چنیے۔

15۔ مان لیجیے A ایک 3×3 ترتیب کی مربع ماترس ہے، تب $|KA|$ برابر ہے

(A) $k|A|$ (B) $k^2|A|$ (C) $k^3|A|$ (D) $3k|A|$

16۔ ذیل میں کون سا صحیح ہے۔

(A) مقطعہ ایک مربع ماترس ہے۔

(B) مقطعہ ماترس کے ساتھ جڑا ہوا عمود ہے۔

(C) مقطعہ مربع ماترس کے ساتھ جڑا ہوا عمود ہے۔

(D) ان میں سے کوئی بھی نہیں۔

4.4 ایک مثلث کا رقبہ (Area of a Triangle)

ہم پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں کہ ایک مثلث کا رقبہ جس کے راس (x_1, y_1)، (x_2, y_2) اور (x_3, y_3) $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$ ۔ عبارت سے دیا گیا ہے، اب یہ عبارت مقطعہ کی شکل میں اس

طرح لکھی جاسکتی ہے۔

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad ...(1)$$

ریمارکس

(i) کیونکہ رقبہ ایک مثبت تعداد ہے؛ ہم ڈیٹرمینینٹ 1 کی ہمیشہ مطلق قدر لیتے ہیں۔

(ii) اگر رقبہ دیا ہوا ہے، حساب لگانے کے لیے ڈیٹرمینینٹ کی دونوں قدریں مثبت اور منفی استعمال کیجیے۔

(iii) تین ہم خط نقطوں سے بننے والا رقبہ صفر ہے۔

مثال 17 اس مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے راس (3,8)، (4,2 –) اور (5,1) ہیں۔

حل مثلث کا رقبہ دیا گیا ہے۔

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[3(2-1) - 8(-4-5) + 1(-4-10)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(3 + 72 - 14) = \frac{61}{2}$$

مثال 18 مقطعہ کا استعمال کر کے اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جو نقاط A(1,3) اور B(0,0) کے ملنے سے بنتا ہے اور k معلوم کیجیے اگر D(k,0) ایک نقطہ ہے تاکہ مثلث ABD کا رقبہ 3 مربع اکائیاں ہے۔

حل مان لیجیے P (x, y)، AB پر کوئی بھی نقطہ ہے۔ تب مثلث ABP کا رقبہ صفر ہے (کیوں؟) اس لیے

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

یہ دیتا ہے $\frac{1}{2}(y - 3x) = 0$ یا $y = 3x$

جوکہ خط AB کی مطوبہ مساوات ہے۔

ساتھ ہی کیونکہ مثلث ABD کا رقبہ 3 مربع اکائیاں ہمارے پاس ہے

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm 3$$

یہ دیتا ہے $\frac{-3k}{2} = \pm 3$ یعنی $k = \pm 2$

مشق 4.3

1۔ ذیل میں سے ہر ایک میں مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے جن کے راس ان نقطوں پر ہیں۔

(i) (1, 0), (6, 0), (4, 3) (ii) (2, 7), (1, 1), (10, 8)

(iii) (–2, –3), (3, 2), (–1, –8)

2۔ دکھایئے کہ نقطے

$A\,(a, b+c)$, $B\,(b, c+a)$, $C(c, a+b)$ ہم خط ہیں۔

3۔ k کی قدریں معلوم کیجیے اگر مثلث کا رقبہ 4 مربع اکائی ہے اور راس یہ ہیں۔

(i) (k, 0), (4, 0), (0, 2) (ii) (–2, 0), (0, 4), (0, k)

4۔ (i) مقطعہ کا استعمال کر کے اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جو نقاط (1,2) اور (3,6) کو ملانے سے بنتی ہے

(ii) مقطعہ کا استعمال کر کے اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جو نقاط (3,1) اور (9,3) کو ملانے سے بنتی ہے۔

5۔ اگر ایک مثلث کا رقبہ 35 مربع اکائیاں ہیں جس کے راس (6– 2)، (5,4) اور (k 4) تب k ہے۔

(A) 12 (B) –2 (C) –12, –2 (D) 12, –2

4.5 صغیرے (Minors) اور ہم ضربی (Cofactors)

اس حصہ میں مقطعہ کے پھیلاؤ کو جامع شکل میں لکھنے کے بارے میں صغیرے اور ہم ضربی کا استعمال کریں گے۔

تعریف 1 ایک مقطعہ کے ایک عنصر a_{ij} کا اصغر ایک مقطعہ سے ہے جو اس کی ith قطار اور j^{th} کالم کو نکالنے سے ملتا ہے

جس میں a_{ij} موجود ہے۔ اصغر a_{ij} کو M_{ij} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ریمارک ایک n رتبہ جہاں $(n \geq 2)$ والے مقطعہ کے ایک عنصر کا صغیر $(n-1)$ رتبہ کا ایک مقطعہ ہے۔

مثال 19 مقطعہ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ میں عنصر 6 کا صغیر معلوم کیجیے۔

حل کیونکہ 6 دوسری قطار اور تیسرے کالم میں موجود ہے، اس کا M_{23} دیا گیا ہے۔

(Δ میں R_2 اور C_3 کے نکالنے سے حاصل ہوا ہے۔ $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6$

تعریف 2 عنصر a_{ij} کو ہم ضربی، جو کہ A_{ij} سے ظاہر کیا گیا ہے اس طرح بیان کیا گیا ہے۔

جہاں M_{ij}، A_{ij} کا صغیر ہے $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

مثال 20 مقطعہ $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ کے تمام عناصر کے صغیرے اور ہم ضربی معلوم کیجیے۔

حل عنصر a_{ij} کا صغیر M_{ij} ہے۔

یہاں $a_{11} = 1$ ہے اس لیے $m_{11} = a_{11}$ کا صغیر $= 3$

$M_{12} =$ عنصر a_{12} کا صغیر $= 4$

M_{21} عنصر a_{21} کا صغیر $= -2$

$M_{22} =$ عنصر a_{22} کا صغیر $= 1$

اب a_{ij} کا ہم ضربی A_{ij} ہے۔ اس طرح

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \; M_{11} = (-1)^2 \; (3) = 3$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} \; M_{12} = (-1)^3 \; (4) = -4$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \; M_{21} = (-1)^3 \; (-2) = 2$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} \; M_{22} = (-1)^4 \; (1) = 1$$

مثال 21 عناصر a_{11}، a_{12} کے صغیرے اور ہم ضربی درج ذیل مقطعہ میں معلوم کیجیے۔

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

حل صغیرے اور ہم ضربی کی تعریف سے، ہمارے پاس ہے

a_{11} کا صغیر $= M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}$

a_{11} کا ہم ضربی $= A_{11} = (-1)^{1+1}\ M_{11} = a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}$

a_{21} کا صغیر $= M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\,a_{33} - a_{13}\,a_{32}$

a_{21} کا ہم ضربی $= A_{21} = (-1)^{2+1}\ M_{21} = (-1)\,(a_{12}\,a_{33} - a_{13}\,a_{32}) = -a_{12}\,a_{33} + a_{13}\,a_{32}$

ریمارک مثال 21 میں موجود مقطعہ Δ کو R_1 کے ساتھ پھیلانے، پر ہمارے پاس ہے۔

$$\Delta = (-1)^{1+1}\, a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\, a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\, a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

جہاں A_{ij}، a_{ij} کے ہم ضربی ہے، $= a_{11}\ A_{11} + a_{12}\ A_{12} + a_{13}\ A_{13}$

اسی طرح، Δ کی تحسیب پھیلاؤ کے دوسرے پانچ طریقوں سے کی جا سکتی ہے اس کا مطلب ہے

R_2، R_3، C_1 اور C_3 کے ساتھ

اس طرح $\Delta =$ کسی بھی قطار (یا کالم) کے عناصر کا ان کے نظیری ہم ضربی کے حاصل ضرب کا حاصل جمع ہے۔

نوٹ اگر ایک قطار (یا کالم) کے عناصر کسی بھی دوسری قطار (یا کالم) ہم ضربی سے ضرب کیا جائے تب ان کا مجموعی صفر ہے۔ مثال کے طور پر $\Delta = a_{11}A_{21} + a_{12}\ A_{22} + a_{13}\ A_{23}$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$ (کیونکہ R_1 اور R_2 متماثل ہے)

اسی طرح، ہم دوسری قطاروں اور کالمون کے لیے کوشش کر سکتے ہیں۔

مثال 22 مقطعہ $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ کے عناصر کے صغیرے اور ہم ضربی معلوم کیجیے اور تصدیق کیجیے کہ

$$a_{11}\,A_{31} + a_{12}\,A_{32} + a_{13}\,A_{33} = 0$$

حل ہمارے پاس ہے

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 0 - 20 = -20; \quad A_{11} = (-1)^{1+1}(-20) = -20$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -42 - 4 = -46; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}(-46) = 46$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 0 = 30; \quad A_{13} = (-1)^{1+3}(30) = 30$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 21 - 25 = -4; \quad A_{21} = (-1)^{2+1}(-4) = 4$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -14 - 5 = -19; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}(-19) = -19$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}(13) = -13$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -12 - 0 = -12; \quad A_{31} = (-1)^{3+1}(-12) = -12$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 30 = -22; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}(-22) = 22$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 18 = 18; \quad A_{33} = (-1)^{3+3}(18) = 18$$ اور

اب $a_{11} = 2,\ a_{12} = -3,\ a_{13} = 5;\ A_{31} = -12,\ A_{32} = 22,\ A_{33} = 18$

تا کہ $a_{11}\ A31\ +\ a_{12}\ A_{32}\ +\ a_{13}\ A_{33}$

$= 2(-12) + (-3)(22) + 5(18) = -24 - 66 + 90 = 0$

مشق 4.4

ذیل مقطعہ کے عناصر کے صغیر اور ہم ضربی لکھیے۔

1. (i) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

2. (i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3۔ دوسری قطار کے عناصر کے ہم ضربی کا استعمال کر کے، $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ کی قیمت لکھیے۔

4۔ تیسرے کالم کے عناصر کے ہم ضربی کا استعمال کر کے، $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ معلوم کیجیے۔

5۔ اگر $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ اور A_{ij} ، a_{ij} کا ہم ضربی ہے، تب Δ کی قدر اس سے دی گئی ہے

(A) $a_{11}\,A_{31} + a_{12}\,A_{32} + a_{13}\,A_{33}$ (B) $a_{11}\,A_{11} + a_{12}\,A_{21} + a_{13}\,A_{31}$

(C) $a_{21}\,A_{11} + a_{22}\,A_{12} + a_{23}\,A_{13}$ (D) $a_{11}\,A_{11} + a_{21}\,A_{21} + a_{31}\,A_{31}$

4.6 ایک ماترس کا شریک اور معکوس (Adjoint and Inverse of a Matrix)

پچھلے باب میں ہم ماترس کے معکوس کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ اس حصہ میں ہم ماترس کے معکوس کے وجود کی شرائط پر بحث و مباحثہ کریں گے۔

ماترس A کا معکوس دریافت کرنے کے لئے، یعنی A^{-1}، ہم پہلے ایک ماترس کے شریک کی تعریف بیان کریں گے۔

4.6.1 ایک ماترس کا شریک (Adjoint of a matrix)

تعریف 3 ایک مربع ماترس $A = [_{ij}]_{n\times n}$ کا شریک $[A_{ij}]_{n\times n}$ کے پلٹاؤ کے طور پر معرف کیا جاتا ہے، جہاں A_{ij}، عنصر

کا ہم ضربی ہے، ماترس A کا شریک $adj\ A$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مان لیجیے $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

تب $adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ کا پلٹاؤ $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$

مثال 23 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ کے لیے adj معلوم کیجیے۔

حل ہمارے پاس ہے $A_{11} = 4,\ A_{12} = -1,\ A_{21} = -3,\ A_{22} = 2$

اس لئے، $$adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ریمارک ایک رتبہ 2 مربع ماترس کے لیے، جو کہ دی گئی

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ سے

$adj A$ کو a_{11} اور a_{22} کو آپس میں بدل نے سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے اور a_{12} اور a_{21} کی علامتیں بدلنے سے، یعنی

$$adj\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

علامت کا بدلنا آپس میں بدلنا

ہم ذیل مسئلہ کو بغیر ثبوت کے بیان کرتے ہیں۔

مسئلہ 1 اگر A درجہ n کی کوئی دی ہوئی ماترس درجہ n کی ہے، تب

$$A(adj\ A) = (adj\ A)\ A = |A|I$$

تصدیق مان لیجیے $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$، تب $adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$

کیونکہ ایک قطار (یا کالم) کے عناصر کا ان کے نظیری ہم ضربی کے حاصل ضرب کا مجموعہ |A| کے برابر ہے یا پھر صفر ہے تو ہمارے پاس ہے۔

$$A\,(adj\ A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|\,I$$

اسی طرح، ہم دکھا سکتے ہیں کہ $(adj\ A)\,A = |A|I$

اس لیے $A\,(adj\ A) = (adj\ A)\,A = |A|I$

تعریف 4 ایک مربع ماترس A ایک نادر Singular ماترس کہلاتی ہے اگر $|A| = 0$

مثال کے طور پر، ماترس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ کا مقطعہ ہے۔

اس لیے A ایک نادر متارس ہے۔

تعریف 5 ایک مربع ماترس A، ایک غیر نادر ماترس کہلاتی ہے اگر $|A| \neq 0$

مان لیجیے $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ تب $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} 4 - 6 = -2 \neq 0$

اس لیے A ایک غیر نادر ماترس ہے۔

ہم ذیل مسئلوں کو بغیر ثبوت کے بیان کرتے ہیں۔

مسئلہ 2 اگر A اور B یکساں ترتیب کی غیر نادر ماترس ہیں۔ تب AB اور BA بھی یکساں ترتیب کی غیر نادر ماترس ہیں۔

مسئلہ 3 ماترسوں کو حاصل ضرب کا ڈیٹرمنینٹ ان کے اپنے الگ الگ ڈیٹرمنینٹس کے حاصل ضرب کے برابر ہے یعنی $|AB| = |A|.|B|$، جہاں A اور B یکساں ترتیب والے مربع ماترس ہیں۔

ریمارک ہم جانتے ہیں کہ

$$(adj\ A)\,A = |A|\,I = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$

ماترس کے دونوں طرف مقطعہ لکھنے پر، ہمارے پاس ہے

$$|(adj\ A)\,A| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix}$$

یعنی $|(adj\ A)|\ |A| = |A|^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (کیوں؟)

یعنی $|(adj\ A)|\ |A| = |A|^3$ (1)

یعنی $|(adj\ A)| = |A|^2$

عام طور پر اگر A ایک رتبہ n کی مربع ماترس ہے، تب $|adj\ (A)| = |A|^{n-1}$

مسئلہ 4 ایک مربع ماترس A قابلِ تعکیس ہے اگر A غیر نادر ماترس ہے۔

ثبوت مان لیجیے A ایک رتبہ n کی قابلِ تعکیس ماترس ہے اور I رتبہ n کی تماثلہ ماترس ہے۔

تب n رتبہ کی ایک مربع ماترس n رتبہ کا وجود ہے تا کہ۔ $I=BA=AB$

کیونکہ $AB=I$ $|AB|=|I|$ یا $|A|\ |B| = 1$ $(|I|=1, |AB| = |A||B|)$

یہ دیتا ہے $|A| \neq 0$ اس لیے A غیر نادر ماترس ہے

اس کے برعکس، مان لیجیے A ایک غیر نادر ہے۔ تب $|A| \neq 0$

اب $A\ (adj\ A) = (adj\ A)\ A = |A|\,I$ (مسئلہ 1)

یا $A\left(\dfrac{1}{|A|}adj\ A\right) = \left(\dfrac{1}{|A|}adj\ A\right)A = I$

یا $AB = BA = I$ جہاں $B = \dfrac{1}{|A|}adj\ A$

اس طرح A قابلِ تعکیس ہے اور $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}adj\ A$

مثال 24 اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ہے، تب تصدیق کیجیے کہ $A\ adj\ A = |A|\,I$۔ ساتھ ہی A^{-1} معلوم کیجیے۔

حل ہمارے پاس ہے $|A|=1(16-9)-3(4-3)+3(3-4)=1\neq 0$

اب $A_{11}=7, A_{12}=-1, A_{13}=-1, A_{21}=-3, A_{22}=1, A_{23}=0, A_{31}=-3, A_{32}=0, A_{33}=1$

اس لئے $adj\, A=\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$

اب $A\,(adj\; A)=\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}7-3-3&-3+3+0&-3+0+3\\7-4-3&-3+4+0&-3+0+3\\7-3-4&-3+3+0&-3+0+4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=(1)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=|A|.I$$

ساتھ ہی $|A|^{-1}=\frac{1}{|A|}\,adj\; A=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$

مثال 25 اگر $A=\begin{bmatrix}2&3\\1&-4\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}1&-2\\-1&3\end{bmatrix}$ ہو، تب تصدیق کیجیے کہ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

حل ہمارے پاس ہے $AB=\begin{bmatrix}2&3\\1&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&5\\5&-14\end{bmatrix}$

کیونکہ، $|AB|=-11\neq 0$, $(AB)^{-1}$ موجود ہے $(AB)^{-1}$ اس طرح دیا جاتا ہے۔

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{|AB|}\,adj\,(AB)=-\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-14&-5\\-5&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}14&5\\5&1\end{bmatrix}$$

اس کے آگے $|A|=-11\neq 0$ اور $|B|=1\neq 0$ اس لیے A^{-1} اور B^{-1} دونوں وجود میں ہیں اور اس طرح دیے گیے ہیں۔

$$A^{-1}=-\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-4&-3\\-1&2\end{bmatrix},\ B^{-1}=\begin{bmatrix}3&2\\1&1\end{bmatrix}$$

اس لیے $B^{-1}A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

اس کا مطلب ہے $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

مثال 26 دکھایئے کہ ماترس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ مساوات $A^2 - 4A + I = O$ کو مطمئن کرتی ہے جہاں 'I' ایک 2×2 اکائی ماترس ہے اور O ایک 2×2 صفر ماترس ہے۔ اس مساوات کا استعمال کر کے A^{-1} دریافت کیجیے۔

حل ہمارے پاس ہے $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

اس طرح $A^2 - 4A + I = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$

اب $A^2 - 4A + I = O$

$AA - 4A = -I$

$A\ A(A^{-1}) - 4\ A\ A^{-1} = -I\ A^{-1}$ (A^{-1} سے پہلے ضرب کرنے پر، کیونکہ $|A|\neq 0$)

یا $A(A\ A^{-1}) - 4I = -A^{-1}$

یا $A\ I - 4I = -A^{-1}$

یا $A^{-1} = 4I - A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

اس لیے $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

مشق 4.5

مشق '1' اور '2' میں ہر ایک ماترس کا شریک معلوم کیجیے۔

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

مشق 3 اور 4 میں تصدیق کیجیے کہ $A(adj\,A) = (adj\,A)A = |A|I$

3. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

دی ہوئی مشقوں 5 تا 11 میں ہر ایک ماترس کا معکوس دریافت کیجیے (اگر موجود ہے)

5. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

12۔ مان لیجیے $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ ہیں۔ تصدیق کیجیے کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

13۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ہے۔ دکھایئے کہ $A^2 - 5A + 7I = O$ ۔ اس طرح A^{-1} دریافت کیجیے۔

14۔ ماترس $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ کے لیے، a اور b اعداد دیجیے تا کہ $A^2 + aA + bI = O$ ۔

15۔ ماترس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ کے لیے۔

دکھایئے کہ $A^3 - 6A^2 + 5A + 11\,I = O$ اس طرح A^{-1} دریافت کیجیے۔

16۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ہے، تصدیق کیجیے کہ $A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = O$ ہے اور اس طرح

دریافت کیجیے۔

17۔ مان لیجیے A ایک غیر نادر 3×3 کی مربع ماترس ہے۔ تب $|adj\ A|$ برابر ہے

(A) $|A|$ (B) $|A|^2$ (C) $|A|^3$ (D) $3|A|$

18۔ ایک A رتبہ 2 کی قابلِ تعکیس ماترس ہے، تب $\det(A^{-1})$ برابر ہے۔

(A) $\det(A)$ (B) $\dfrac{1}{\det(A)}$ (C) 1 (D) 0

4.7 مقطعہ اور ماترس کے استعمال

اس حصہ میں ہم قابلِ تعکیس اور ماترس کے اطلاق کے لیے دو یا تین متغیر والی خطی مساواتوں کو حل کرنے کے نظام پر بحث ومباحثہ کریں گے اور خطی مساواتوں کے نظام کی ہم آہنگ کی جانچ کریں گے۔

ہم آہنگ نظام (Consistent system) مساواتوں کا ایک نظام آہنگ کہلاتا ہے اگر اس کے حل (ایک یا زیادہ) وجود میں ہوں۔

غیر ہم آہنگ نظام (Inconsistent system) مساواتوں کا ایک نظام غیر ہم آہنگ کہلاتا ہے اگر اس کے حل موجود نہ ہوں۔

نوٹ اس باب میں ہم اپنے آپ کو خطی مساواتوں کے نظام تک ہی محدود رکھیں گے جن کا صرف ایک ہی حل ہو۔

4.7.1 ایک ماترس کے معکوس کا استعمال کر کے خطی مساواتوں کے نظام کا حل

ہمیں خطی مساواتوں کا نظام کو ماترس مساواتوں میں ظاہر کرنا چاہئے اور انہیں ماترس کے معکوس کا استعمال کر کے حل کرنا چاہئے۔

مساواتوں کے نظام پر غور کیجیے۔

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

مان لیجیے کہ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$ ہے

تب، مساوات کا نظام اس طرح لکھا جا سکتا ہے، AX = B، یعنی

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

کیس 1 اگر A ایک غیر نادر ماترس ہے۔ تب اس کا معکوس موجود ہے۔ اب

$$AX = B$$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \quad (\text{سے پہلے ضرب کرنے پر } A^{-1}) \quad \text{یا}$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B \quad (\text{تلازمی خصوصیت سے}) \quad \text{یا}$$

$$IX = A^{-1}B \quad \text{یا}$$

$$X = A^{-1}B \quad \text{یا}$$

یہ ماترس مساوات دی ہوئی مساوات کے نظام کے لیے منفرد حل دستیاب کراتا ہے جیسا کہ ایک ماترس کا معکوس منفرد ہے۔ یہ مساواتوں کے نظام کو حل کرنے کا طریقہ ماترس طریقہ کہلاتا ہے۔

کیس II اگر A ایک نادر ماترس ہے، تب $|A| = 0$

اس کیس (مسئلہ) میں، ہم $(adj\ A)B$ کی تحسیب کرتے ہیں۔

اگر $(adj\ A)B \neq O$، (کیونکہ O صفر ماترس ہے)، تب حل موجود نہیں ہے اور مساواتوں کا نظام غیر ہم آہنگ ہے۔

اگر $(adj\ A)B = O$ ہے تب نظام ہم آہنگ یا غیر ہوسکتا ہے یعنی نظام یا تو بہت سے حل رکھتا ہے یا کوئی حل نہیں رکھتا ہے۔

مثال 27 مساواتوں کے نظام کو حل کیجیے

$$2x + 5y = 1$$

$$3x + 2y = 7$$

حل مساواتوں کا نظام $AX = B$ شکل میں لکھا جاسکتا ہے، جہاں

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

اب $|A| = -11 \neq 0$, اس طرح A ایک غیر نادر ماترس ہے اور اس لیے اس کا منفرد حل ہے

یہ نوٹ کرلیجیے کہ $A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

اس لئے $X = A^{-1}B = -\dfrac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

یعنی $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\dfrac{1}{11}\begin{bmatrix} -33 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

اس طرح $x=3$ ، $y-1$

مثال 28 ذیل مساواتوں کا نظام ماترس کے طریقے سے حل کیجیے۔

حل مساواتوں کا نظام $AX=B$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے، جہاں

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ہم دیکھتے ہیں

$$|A| = 3(2-3) + 2(4+4) + 3(-6-4) = -17 \neq 0$$

$$\begin{array}{lll} A_{11} = -1, & A_{12} = -8, & A_{13} = -10 \\ A_{21} = -5, & A_{22} = -6, & A_{23} = 1 \\ A_{31} = -1, & A_{32} = 9, & A_{33} = 7 \end{array}$$

اس لیے

$$A^{1} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

تاکہ

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

یعنی

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -17 \\ -34 \\ -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

اس لیے $x=1$، $y=2$ اور $z=3$

مثال 29 تین اعداد کا مجموعہ 6 ہے۔ اگر ہم تیسرے عدد کو 3 سے ضرب کریں اور اس میں دوسرے عدد کو جمع کر دیں تو ہمیں

11 حاصل ہوتا ہے۔ پہلے اور تیسرے اعداد کو جمع کرنے سے ہمیں دوسرے عدد کا دوگنا حاصل ہوتا ہے۔ اسے الجبرا کے طور پر دکھائیے اور اعداد کو ماترس کا طریقہ استعمال کر کے دریافت کیجیے۔

حل مان لیجیے، پہلے دوسرے اور تیسرے اعداد کو بالترتیب x، y اور z سے ظاہر کیا گیا ہے۔ تب دیئے ہوئے حالات کے مطابق ہمارے پاس ہے۔

$$x+y+z=6$$
$$y+3z=11$$
$$x-2y+z=0 \text{ اور } x+z=2y$$

اس نظام کو $AX = B$ کی طرح لکھا جاسکتا ہے۔ جہاں

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} \text{ اور } B=\begin{bmatrix}6\\ 11\\ 0\end{bmatrix}$$

یہاں، $|A| = 1\,(1+6) - (0-3) + (0-1) = 9 \neq 0$ اب ہم $adj\ A$ دریافت کرتے ہیں۔

$$A_{11} = 1\ (1+6) = 7, \qquad A_{12} = -(0-3) = 3, \qquad A_{13} = -1$$
$$A_{21} = -(1+2) = -3, \qquad A_{22} = 0, \qquad A_{23} = -(-2-1) = 3$$
$$A_{31} = (3-1) = 2, \qquad A_{32} = -(3-0) = -3, \qquad A_{33} = (1-0) = 1$$

اس لیے
$$adj\ A=\begin{bmatrix}7 & -3 & 2\\ 3 & 0 & -3\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

اس طرح
$$A^{-1}\frac{1}{|A|}\text{adj }(A)=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}7 & -3 & 2\\ 3 & 0 & -3\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

کیونکہ
$$X = A^{-1}B$$

$$X=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}7 & -3 & 2\\ 3 & 0 & -3\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 11\\ 0\end{bmatrix}$$

یا
$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}42-33+0\\ 18+0+0\\ -6+33+0\end{bmatrix}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}9\\ 18\\ 27\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$$

اس طرح $x=1$، $y=2$، $z=3$ ہے

مشق 4.6

مشق 1 تا 6 میں مساوات کے نظام کی ہم آہنگی کی جانچ کیجیے۔

1. $x+2y=2$
   $2x+3y=3$

2. $2x-y=5$
   $x+y=4$

3. $x+3y=5$
   $2x+6y=8$

4. $x+y+z=1$
   $2x+3y+2z=2$
   $ax+ay+2az=4$

5. $3x-y-2z=2$
   $2y-z=-1$
   $3x-5y=3$

6. $5x-y+4z=5$
   $2x+3y+5z=2$
   $5x-2y+6z=-1$

مشق 7 تا 17 میں ماترس طریقے کا استعمال کر کے خطی مساواتوں کے نظام کو حل کیجیے۔

7. $5x+2y=4$
   $7x+3y=5$

8. $2x-y=-2$
   $3x+4y=3$

9. $4x-3y=3$
   $3x-5y=7$

10. $5x+2y=3$
    $3x+2y=5$
    $3y-5z=9$

11. $2x+y+z=1$
    $x-2y-z=\frac{3}{2}$
    $3y-5z=9$

12. $x-y+z=4$
    $2x+y-3z=0$
    $x+y+z=2$

13. $2x+3y+3z=5$
    $x-2y+z=-4$
    $3x-y-2z=3$

14. $x-y+2z=7$
    $3x+4y-5z=-5$
    $2x-y+3z=12$

15۔ اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ہو، تو A^{-1} معلوم کیجیے۔ A^{-1} کا استعمال کر کے مساواتوں کے نظام کو حل کیجیے۔

$$2x-3y+5z=11$$
$$3x+2y-4z=-5$$
$$x+y-2z=-3$$

16۔ 4 کلوگرام پیاز، 3 کلوگرام گیہوں اور 2 کلوگرام چاول کی قیمت 60 روپے ہے۔ 2 کلوگرام پیاز، 4 کلوگرام گیہوں

اور 6 کلوگرام چاول کی قیمت 90 روپے ہے۔ 6 کلوگرام پیاز، 2 کلوگرام گیہوں اور 3 کلوگرام چاول کی قیمت 70 روپے ہے۔ ماترس طریقے کا استعمال کر کے ہر اشیاء کی فی کلوگرام قیمت دریافت کیجیے۔

متفرق مثالیں

مثال 30 اگر a,b,c مثبت اور غیر برابر ہیں، دکھائیے کہ مقطعہ $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ کی قدر منفی ہے۔

حل دیئے ہوئے مقطعہ پر $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ لاگو کرکے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix}$$ ($R_2 \to R_2 - R_1$ اور $R_3 \to R_3 - R_1$ لاگو کرکے)

$$= (a+b+c)\,[(c-b)(b-c) - (a-c)(a-b)]$$ (C_1 کے ساتھ پھیلانے پر)

$$= (a+b+c)(-a^2 - b^2 - c^2 + ab + bc + ca)$$

$$= \frac{-1}{2}(a+b+c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$$

$$= \frac{-1}{2}(a+b+c)\,[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

جو کہ منفی ہے (کیونکہ $a + b + c > 0$ اور $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > 0$)

مثال 31 اگر a, b, c، A.P. میں ہیں، قدر معلوم کیجیے۔

$$\begin{vmatrix} 2y+4 & 5y+7 & 8y+a \\ 3y+5 & 6y+8 & 9y+b \\ 4y+6 & 7y+9 & 10y+c \end{vmatrix}$$

حل دئے ہوئے مقطعہ پر $R_1 \to R_1 + R_3 - 2R_2$ لاگو کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3y+5 & 6y+8 & 9y+b \\ 4y+6 & 7y+9 & 10y+c \end{vmatrix} = 0 \qquad$$ (کیونکہ $2b = a + c$ کے لیے)

مثال 32 دکھائیے کہ

$$\Delta = \begin{vmatrix} (y+z) & xy & zx \\ xy & (x+z)^2 & yz \\ xz & yz & (x+y)^2 \end{vmatrix} = 2xyz(x+y+z)^3$$

حل Δ پر $R_1 \to xR_1, R_2 \to yR_2, R_3 \to zR_3$ لاگو کرنے پر اور پھر xyz سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} x(y+z)^2 & x^2 y & x^2 z \\ xy^2 & y(x+z)^2 & y^2 z \\ xz^2 & yz^2 & z(x+y)^2 \end{vmatrix}$$

C_1 C_2 اور C_3 سے بالترتیب مشترک اجزائے ضربی x, y, z لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = \frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (x+z)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (x+y)^2 \end{vmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - C_1, C_3 \to C_3 - C_1$ لاگو کرنے پر، ہمارے پاس ہے۔

$$\Delta = \begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2-(y+z)^2 & x^2-(y+z)^2 \\ y^2 & (x+z)^2 - y^2 & 0 \\ z^2 & 0 & (x+y)^2 - z^2 \end{vmatrix}$$

C_2 اور C_3 مشترک اجزائے ضربی $(x+y+z)$ لینے پر، ہمارے پاس ہے۔

$$\Delta = (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} (y+z)^2 & x-(y+z) & x-(y+z) \\ y^2 & (x+z)-y & 0 \\ z^2 & 0 & (x+y)-z \end{vmatrix}$$

$R_1 \to R_1 - (R_2 + R_3)$ لاگو کرنے پر، ہمارے پاس ہے۔

$$\Delta = (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} 2yz & -2z & -2y \\ y^2 & x-y+z & 0 \\ z^2 & 0 & x+y-z \end{vmatrix}$$

$C_2 \to (C_2 + \frac{1}{y}C_1)$ اور $C_3 \to \left(C_3 + \frac{1}{z}C_1\right)$ لاگو کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} 2yz & 0 & 0 \\ y^2 & x+z & \frac{y^2}{z} \\ z^2 & \frac{z^2}{y} & x+y \end{vmatrix}$$

آخیر میں R_1 کے ساتھ پھیلانے پر، ہمارے پاس ہے۔

$$\Delta = (x+y+z)^2 \ (2yz)\ [(x+z)(x+y) - yz] = (x+y+z)^2 \ (2yz)\ (x^2+xy+xz)$$

$$= (x+y+z)^3 (2xyz)$$

مثال 33 حاصل ضرب $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ کا استعمال کر کے ذیل مساواتوں کے نظام کو حل کیجیے۔

$$x - y + 2z = 1$$

$$2y - 3z = 1$$

$$3x - 2y + 4z = 2$$

حل حاصل ضرب $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ پر غور کیجیے۔

$$= \begin{bmatrix} -2-9+12 & 0-2+2 & 1+3-4 \\ 0+18-18 & 0+4-3 & 0-6+6 \\ -6-18+24 & 0-4+4 & 3+6-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اسی طرح $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

اب مساوات کا دیا ہوا نظام، ماترس کی شکل اس طرح لکھا جا سکتا ہے، جیسا کہ دیا گیا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+0+2 \\ 9+2-6 \\ 6+1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

اس طرح $x = 0, y = 5 \text{ اور } z = 3$ ہے۔

مثال 34 ثابت کیجیے کہ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+bx & c+dx & p+qx \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

حل $R_1 \to R_1 - x R_2$ کو Δ پر لاگو کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = \begin{vmatrix} a(1-x^2) & c(1-x^2) & p(1-x^2) \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$= (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

لاگو کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\Delta = (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

باب 4 پر مبنی متفرق مشق

1- ثابت کیجیے کہ مقطعہ $\begin{vmatrix} x & \sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & -x & 1 \\ \cos\theta & 1 & x \end{vmatrix}$ ، θ سے مبرہ ہے۔

2- مقطعہ کو بغیر پھیلائے ہوئے، ثابت کیجیے کہ $\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

3- $\begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{vmatrix}$ کی قدر معلوم کیجیے۔

4- اگر a,b اور c حقیقی اعداد ہیں اور $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 0$

تو دکھائیے کہ $a+b+c=0$ یا $a=b=c$ ہے۔

5- مساوات $\begin{vmatrix} x+a & x & x \\ x & x+a & x \\ x & x & x+a \end{vmatrix} = 0, a \neq 0$ کو حل کیجیے۔

6- ثابت کیجیے $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

7- اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ تو $(AB)^{-1}$ معلوم کیجیے۔

8- مان لیجیے $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ تو تصدیق کیجیے کہ

(i) $[adj\ A]^{-1} = adj\ (A^{-1})$ (ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

9۔ $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$ کی قدر معلوم کیجیے۔

10۔ $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x+y & y \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix}$ کی قدر معلوم کیجیے۔

مشق 11 تا 15 میں مقطعہ کی خصوصیات کا استعمال کر کے، ثابت کیجیے کہ

11۔ $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \beta+\gamma \\ \beta & \beta^2 & \gamma+\alpha \\ \gamma & \gamma^2 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\beta-\gamma)\ (\gamma-\alpha)\ (\alpha-\beta)\ (\alpha+\beta+\gamma)$

12۔ $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+px^3 \\ y & y^2 & 1+py^3 \\ z & z^2 & 1+pz^3 \end{vmatrix} = (1+pxyz)\ (x-y)\ (y-z)\ (z-x)$ جہاں p کوئی بھی عدد یہ ہے۔

13۔ $\begin{vmatrix} 3a & -a+b & -a+c \\ -b+a & 3b & -b+c \\ -c+a & -c+b & 3c \end{vmatrix} = 3(a+b+c)\ (ab+bc+ca)$

14. $\begin{vmatrix} 1 & 1+p & 1+p+q \\ 2 & 3+2p & 4+3p+2q \\ 3 & 6+3p & 10+6p+3q \end{vmatrix} = 1$

15. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$

16۔ مساواتوں کے نظام کو حل کیجیے۔

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{10}{z}=4$$
$$\frac{4}{x}-\frac{6}{y}+\frac{5}{z}=1$$
$$\frac{6}{x}+\frac{9}{y}-\frac{20}{z}=2$$

مشق 17 تا 19 میں صحیح جواب چنیے

17۔ اگر a, b, c، A.P. میں ہیں۔ تب مقطعہ

$$\begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ x+3 & x+4 & x+2b \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix}$$

(A) 0 (B) 1 (C) x (D) $2x$ ہے۔

18۔ اگر x, y, z غیرصفر اعداد ہیں،تب ماترس $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ کا معکوس ہے۔

(A) $\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$ (B) $xyz\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

(C) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ (D) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19۔ مان لیجیے $A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$، جہاں $0 \le \theta \le 2\pi$ ہے۔تب

(A) $\text{Det}(A)=0$ (B) $\text{Det}(A) \in (2,\infty)$

(C) $\text{Det}(A) \in (2,4)$ (D) $\text{Det}(A) \in [2,4]$

خلاصہ

- ماترس $A = [a_{11}]_{1\times 1}$ کا مقطعہ $|a_{11}| = a_{11}$ سے دیا گیا ہے۔
- ماترس $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ کا مقطعہ

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$ سے دیا گیا ہے۔

- ماترس $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ کا مقطعہ دیا گیا ہے (R_1 کے ہمراہ پھیلانے پر)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

کسی بھی مربع ماترس A کے لئے |A| ذیل خصوصیات کو مطمئن کرتا ہے۔

- $|A'| = |A|$، جہاں $A' = A$ کا پلٹاؤ
- اگر ہم دو قطاروں (یا کالموں) کو آپس میں بدلیں تب مقطعہ کی علامت بدل جاتی ہے۔
- اگر کوئی بھی دو قطاریں یا کالم یکساں یا تناسب میں ہیں، تب مقطعہ کی قدر صفر ہوتی ہے۔
- اگر ہم ایک مقطعہ کی ایک قطار یا ایک کالم کے ہر ایک عنصر کو ایک مستقلہ K سے ضرب کریں، تب مقطعہ کی قدر K سے ضرب ہو جائے گی۔
- ایک مقطعہ کو k سے ضرب کرنے کا مطلب ہے صرف ایک قطار (یا ایک کالم) کو k سے ضرب کرتا ہے۔
- اگر $A = [a_{ij}]_{3\times3}$، تب $|k.A| = k^3 |A|$
- اگر ایک مقطعہ کی ایک قطار یا کالم کے عناصر کو دو یا دو سے زیادہ عناصر کے مجموعہ کے طور پر دکھایا جا سکے تب دیا ہوا مقطعہ دو یا دو سے زیادہ مقطعہ کے مجموعہ کے طورر پر دکھایا جا سکتا ہے۔
- اگر ایک مقطعہ کی ایک قطار یا ایک کالم کے ہر ایک عنصر کے ساتھ دوسری قطاروں یا کالموں کے نظیری عناصر کے، برابر ضرب والے عناصر کو جمع کیا جائے، تب مقطعہ کی قدر نہیں بدلتی۔
- راس $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ اور (x_3, y_3) والے مثلث کا رقبہ دیا گیا ہے۔

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

- ایک ماترس A کے مقطعہ کے عنصر a_{ij} کے صغیرے وہ مقطعہ ہے جو j^{th} قطار اور j^{th} کالم کو نکالنے سے مقطعہ بنتا بنتا ہے اور جسے M_{ij} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- a_{ij} کے ہم ضربی $Aij = (-1)^{i+j}\ M_{ij}$ ہے۔

- ایک ماترس A کے مقطعہ کی قدر اس کی ایک قطار (یا ایک کالم) کے عناصر کی ان کے نظیری ہم ضربی حاصل ضرب کے مجموعہ سے حاصل ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر

$$= a_{11}\ A_{11} + a_{12}\ A_{12} + a_{13}\ A_{13}$$

- اگر ایک قطار (یا کالم) کے عناصر کو کسی بھی دوسری قطار (یا کالم) کے عناصر کے ہم ضربیوں سے ضرب کیا جائے، تب ان کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر

$$= a_{11}\ A_{21} + a_{12}\ A_{22} + a_{13}\ A_{23} = 0$$

- اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$، تب $adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$، جہاں A_{ij}, a_{ij} کے ہم ضربی ہے۔

- $A\ (adj\ A) = (adj\ A)\ A = |A|\ I$، جہاں، A، ایک ترتیب n کی مربع ماترس ہے۔

- ایک مربع ماترس A کو نادر یا غیر نادر کہا جا سکتا ہے کہ جیسا کہ $|A|=0$ یا $|A|\neq 0$ ہے۔

ساتھ $A^{-1} = B$ یا $B^{-1} = A$ اور اس طرح $(A^{-1})^{-1} = A$

- ایک مربع ماترس A کا معکوس موجود ہوتا ہے اگر اور صرف اگر A ایک غیر نادر ہے۔

- $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(adj\ A)$

- اگر $a_1\ x + b_1\ y + c_1\ z = d_1$

$$a_2\ x + b_2\ y + c_2\ z = d_2$$

$$a_3\ x + b_3\ y + c_3\ z = d_3,$$

تب ان مساوات کو $AX = B$ کی طرح لکھا جا سکتا ہے جنہیں

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}، B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

- مساوات $AX=B$ کا منفرد حل $A = A^{-1}B$ سے حاصل ہوتا ہے، جہاں $|A| \neq 0$ ہے۔

- مساوات کا ایک نظام ہم آہنگ یا غیر ہم آہنگ ہوتا ہے جیسا کہ اس کا حل موجود ہوتا ہے یا نہیں ایک ماترس مساوات $AX=B$ میں مربع ماترس A کے لیے۔

(i) $|A| \neq 0$ ایک منفرد حل موجود ہے۔

(ii) $|A|=0$ اور $(adj\ A)\ B \neq 0$، تب کوئی حل موجود نہیں ہے۔

(iii) $|A|=0$ اور $(adj\ A)\ B = 0$، تب نظام ہم آہنگ یا غیر ہم آہنگ ہو سکتا ہے۔

تاریخ کے اوراق (Historical Note)

بہت سی خطی مساواتوں کے غیر پہچانے والے ضریب کو دکھانے کا چینی طریقہ ایک حل کرنے والے بورڈ پر چھڑیوں کا استعمال کر کے اخراج کے سادہ طریقے کی کھوج کی طرف لے جاتی ہے۔ چھڑیوں کا انتظام صاف طور پر ڈیٹرمینینٹ میں موجود اعداد کی تعداد ہے۔ اس لئے چین کے رہنے والوں نے کالم اور قطاروں کو گھٹانے کا تصور پہلے ہی پیدا کر لیا تھا جیسا کہ ڈیٹرمینینٹ کو آسان کرنے میں، میکانی 'چین' pp 30, 93۔

سیکی کوا، ساتویں صدی کے عظیم ریاضی دان نے اپنے کام ''کائے فو کو دائے نو ہو'' نے 1683 میں دکھایا تھا کہ اس کے پاس ڈیٹرمینینٹ اور اس کے پھیلانے کا تصور ہے۔ لیکن اس نے اس طریقے کو صرف دو مساواتوں سے مقدار خارج کرنے میں کیا ہے تا کہ سیدھے طور پر ہم وقت خطی مساواتوں کے سیٹ کے حل۔ ٹی، ہیاشی، ''جاپانی ریاضی میں خاکوڈی اور ڈیٹرمینینٹس''، ٹوکیو ریاضی میں .Proc میں Soc. V۔

وینورمونڈے پہلے شخص تھے جس نے ڈیٹرمینینٹس کو آزاد فنکشن کے طور پر تسلیم کیا۔ انہیں اصل موجد کے نام سے پکارنا چاہئے۔ لیپلیس (1772) ڈیٹرمنینٹ کو اتمائی صفر کی شکل میں پھیلانے کا ایک عام فارمولہ دیا تھا۔ 1973 میں لگرانج نیدوسری اور تیسری ترتیب والے ڈیٹرمینینٹس کو برتا اور ان کا استعمال مساوات حل کرنے کے علاوہ کیا۔ 1801 میں گوس نے ڈیٹرمینینٹس کا استعمال اعداد کے نظریہ میں کیا ہے۔

اگلے عظیم حصے دار بڑا حصہ لینے والا جیکس فلیپی میری بینٹ، (1812) تھا جس نے دو ماترس کے m– کالم اور n– قطاروں کے حاصل ضرب کو رشتہ دینے کے لئے ایک مسئلہ بیان کیا، جو کہ خاص کیس $m=n$ کے لئے جو کہ ایک ضربی مسئلہ کے طور پر سامنے آئے۔

اس کے ساتھ ہی کوچے (1812) نے اسی مضمون کو پیش کیا۔ اس نے لفظ ''ڈیٹرمنینٹ'' کا استعمال موجودہ حالات کے مطابق کیا۔ اس نے ضربی مسئلہ کا ثبوت بینٹس طریقے سے دیا۔ زیادہ مطمئن اس نظریہ میں سب سے زیادہ حصہ کارل گسٹو جیکب جیکوبی نے دیا، اس کے بعد لفظ ڈیٹرمنینٹ کو آخری منظوری ملی۔