باب 3

5259CH03

ماترس
(MATRICES)

❖ 'ریاضی کی روح اس کی آزادی
میں ہی ہوتی ہے۔ کینٹر ❖

3.1 تعارف

ریاضی کی مختلف شاخوں میں ماترس کی جانکاری ضروری ہے۔ ریاضی میں ماترس ایک بہت طاقتور آلہ ہے۔ ریاضی کا یہ آلہ ہمارا کام بہت زیادہ آسان کر دیتا ہے جب ہم اس کا دوسرے سیدھے طریقوں سے موازنہ کرتے ہیں۔ ماترس کی سوچ کا پیدا ہونا ایک نتیجہ ہے، بندھے ہوئے اور سادہ طریقے سے خطی مساواتوں کے نظام کو حل کرنے کے طریقے کا۔ ماترس نہ صرف خطی مساواتوں کے نظام میں ضریب کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال ہوتا ہے، بلکہ ماترس کا استعمال اس سے کہیں زیادہ ہے۔ ماترس نشانی اور عمل کا استعمال الیکٹرانک، پھیلی ہوئی شیٹ پروگرام میں ذاتی کمپیوٹر کے لئے ہوتا ہے، جو کہ بعد میں کاروبار و سائنس کے مختلف شعبوں میں استعمال ہوتا ہے مثال کے طور پر بجٹ بنانے میں، بکری کو بڑھاوا دینے میں، قیمت کا اندازہ لگانے میں، ایک تجربے کے نتیجہ نکالنے میں وغیرہ وغیرہ۔ ساتھ ہی، بہت سے طبعی آپریشن مثال کے طور پر بڑا کرنا، ایک مستوی سے گھمانا اور انعاطف ریاضیاتی کے طور پر ماترس سے دکھائے جا سکتے ہیں ماترس کا استعمال کرپٹوگرافی (Cryptography) میں بھی ہوتا ہے۔ یہ ریاضی کا آلہ کہ صرف سائنس کی کچھ شاخوں میں استعمال ہوتا ہے، بلکہ جینیات، معاشیات، سماجیات، جدید نفسیات اور صنعتی انتظامیہ (Management) میں بھی اس کا استعمال کیا جاتا ہے۔

اس باب میں ہم بنیادی ماترس اور ماترس الجبرا سے روشناسی کو بہت دلچسپ پائیں گے۔

3.2 ماترس

مان لیجئے ہم اس بات کا خلاصہ کرنے کے خواہش مند ہیں کہ رادھا کے پاس 15 کاپیاں ہیں۔ہم اسے [15] سے ظاہر کر سکتے ہیں اس سمجھ کے ساتھ کہ [ ] کے اندر وہ نمبر ہے جو رادھا کے پاس کاپیاں ہیں۔اب اگر ہمیں یہ دکھانا ہو کہ رادھا کے پاس 15 کاپیاں اور 6 پین ہیں۔ہم اسے [6 ,15] سے ظاہر کر سکتے ہیں یہ سمجھتے ہوئے کہ [ ] کے اندر پہلا عدد کاپیوں کی تعداد جب کہ دوسرا عدد پینوں کی تعداد ہے جو رادھا کے پاس موجود ہیں۔اب ہمیں یہ ماننا چاہیے کہ ہماری خواہش ہے کہ یہ معمولات کاپیوں اور پینوں کی جو کہ رادھا اور اس کی دوسہیلیوں فوزیہ اور سمرن کے پاس موجود ہیں یہ اس طرح سے دی گئی ہیں۔

رادھا	کے پاس	15	کاپیاں	اور	6 پین ہیں،
فوزیہ	کے پاس	10	کاپیاں	اور	2 پین ہیں،
سمرن	کے پاس	13	کاپیاں	اور	5 پین ہیں۔

اب یہ جدول کی شکل میں جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے رکھا جا سکتا ہے:

	کاپیاں	پین
رادھا	15	6
فوزیہ	10	2
سمرن	13	5

اور یہ اس طرح (دکھایا) سمجھایا جا سکتا ہے۔

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 10 & 2 \\ 13 & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{پہلی قطار} \\ \leftarrow \text{دوسری قطار} \\ \leftarrow \text{تیسری قطار} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{پہلا کالم} & \text{دوسرا کالم} \end{array} & \end{array}$$

یا

	رادھا	فوزیہ	سمرن
کاپیاں	15	10	13
پین	6	2	5

جسے اس طرح بھی دکھایا جا سکتا ہے:

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 15 & 10 & 13 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{پہلی قطار} \\ \text{دوسری قطار} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{پہلا کالم} & \text{دوسرا کالم} & \text{تیسرا کالم} \end{array} & \end{array}$$

پہلے طریقے میں پہلے کالم میں موجود درج اعداد و شمار بالترتیب رادھا، فوزیہ اور سمرن کے پاس موجود کتابوں کو دکھاتی ہے اور دوسرے کالم میں موجود درج اعداد و شمار بالترتیب رادھا، فوزیہ اور سمرن کے پاس موجود پینوں کو دکھاتے ہیں، اسی طرح دوسرے طریقے میں پہلی قطار میں درج اعداد و شمار بالترتیب رادھا، فوزیہ اور سمرن کے پاس موجود کاپیوں کی تعداد کا بتاتے ہیں دوسری قطار میں درج اعداد و شمار بالترتیب رادھا، فوزیہ اور سمرن کے پاس موجود پینوں کی تعداد ہے۔ اوپر کی طرح کے طریقے یا پھیلاؤ کو ماترس کہتے ہیں۔ صحیح طریقے سے ہم ماترس کی تعریف اس طرح بیان کرتے ہیں۔

تعریف 1 ماترس ایک اعداد یا فنکشن کی مرتب مستطیل نما ترتیب ہے۔ اعداد یا فنکشن ماترس کے عناصر کہلاتے ہیں۔

ہم ماترس کو انگریزی کے بڑے حروف سے ظاہر کرتے ہیں۔ ذیل ماترس کی کچھ مثالیں ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2+i & 3 & -\frac{1}{2} \\ 3.5 & -1 & 2 \\ \sqrt{3} & 5 & \frac{5}{7} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1+x & x^3 & 3 \\ \cos x & \sin x + 2 & \tan x \end{bmatrix}$$

اوپر کی مثالوں میں عناصر کے افقی خطوط ماترس کی قطاریں بناتے ہیں، اور عناصر کے راسی خطوط ماترس کے کالم بناتے ہیں۔ اس طرح A میں 3 قطاریں اور 2 کالم ہیں، B میں 3 قطاریں اور 3 کالم ہیں جب کہ C میں 2 قطاریں اور 3 کالم ہیں۔

3.2.1 ایک ماترس کا رتبہ

ایک ماترس جس میں m قطاریں اور n کالم ہیں $m \times n$ رتبہ کی ماترس کہلاتی ہے یا آسان ترین طریقے میں $m \times n$ ماترس

(جسے m بائی n ماترس پڑھا جاسکتا ہے) اس طرح اوپر کی ماترس کی مثالوں کے حوالے سے ہمارے پاس A ایک 2×3 ماترس ہے، B ایک 3×3 ماترس ہے اور C ایک 3×2 ماترس ہے۔ ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ بالترتیب A میں $3 \times 2 = 6$ عناصر ہیں B اور C میں 9 اور 6 عناصر ہیں۔

عام طور پر ایک $m \times n$ ماترس ذیل مستطیل نما ترتیب ہے۔

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

یا $A=[a_{ij}]_{m\times n}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n \quad i, j \in N$

نوٹ اس باب میں

1۔ ہم علامت $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ کو ماترس A جس کی ترتیب m × n کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کرتے ہیں۔

2۔ ہم صرف ان ماترس پر غور کریں گے جن کے عناصر حقیقی اعداد ہیں یا وہ فنکشن ہیں جن کی حقیقی قدر ہے۔

اس طرح i^{th}، قطار عناصر $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{in}$ پر مبنی ہے، جب کہ j^{th} کالم عناصر $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \ldots, a_{mj}$ پر مبنی ہے۔

عام طور پر، a_{ij} ایک عنصر ہے جو i^{th}، قطار اور j^{th} کالم میں واقع ہے۔ ہم اسے A کا $(i, j)^{th}$ عنصر بھی کہہ سکتے ہیں۔ $m \times n$ ماترس میں عناصر کی تعداد mn کے برابر ہوگی۔

ہم ایک ماترس سے (قطار یا کالم) کے ذریعہ ایک مستوی میں نقطہ (x ,y) کو $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (یا [x,y]) کے ذریعہ دکھا سکتے ہیں۔

مثال کے طور پر نقطہ P (0, 1) کو ماترس کے طور پر اس طرح دکھایا جاسکتا ہے۔

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ یا } [0 \ 1]$$

مشاہدہ کیجیے کہ اس طرح ہم ایک بند تخلیط نما شکل کے راسوں کو ماترس کی طرح ظاہر کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر، ایک چار ضلعی ABCD پر غور کیجیے جس کے راس A (1, 0), B (3, 2), C (1, 3), D (–1, 2) ہیں۔

اب چار ضلعی ABCD ایک ماترس کی شکل میں اس طرح دکھایا جاسکتا ہے۔

$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 4} \end{array} \quad \text{یا} \quad Y = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{4\times 2}$$

اس طرح ماترس کا استعمال مستوی میں جیومیٹریائی اشکال کے راسوں کو دکھانے کے لئے کیا جا سکتا ہے۔

اب ہمیں ذیل مثالوں پر غور کرنا چاہیے۔

مثال 1 تین صنعتوں I, II اور III میں کام کرنے والے مزدور عورتوں اور مردوں کی تعداد کے بارے میں ذیل معلومات پر غور کیجیے۔

	مرد مزدور	عورتیں مزدور
I	30	25
II	25	31
III	27	26

اوپر دی ہوئی معلومات کو 2×3 ماترس میں دکھایئے ہے۔ تیسری قطار اور دوسرے کالم میں درج اعداد وشمار کس چیز کو دکھاتے ہیں؟

حل یہ معلومات 2×3 ماترس کی شکل میں ذیل طریقے سے دکھائی گئی ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 30 & 25 \\ 25 & 31 \\ 27 & 26 \end{bmatrix}$$

تیسری قطار اور دوسرے کالم میں درج اعداد وشمار صنعت (فیکٹری) III میں کام کرنے والی مزدور عورتوں کی تعداد بتاتا ہے۔

مثال 2 اگر ایک ماترس میں 8 عناصر ہیں، تو معلوم کیجیے اس میں کتنے ممکنہ رتبہ موجود ہیں؟

حل ہم جانتے ہیں کہ اگر ماترس $m \times n$ ترتیب کی ہے، تو اس میں $m\,n$ عناصر ہیں۔ اسطرح 8 عناصر کے ساتھ ماترس کے تمام ممکن ترتیب معلوم کرنے کے لئے ہم وہ تمام طبعی اعداد کے مرتب جوڑے معلوم کریں گے جن کا حاصل ضرب 8 ہے۔

اس طرح تمام ممکن مرتب جوڑے $(1, 8), (8, 1), (4, 2), (2, 4)$ ہیں

اس طرح ممکنہ ترتیب $1\times 8, 8\times 1, 4\times 2, 2\times 4$ ہیں۔

مثال 3 ایک 2×3 ماترس بنائیے جس کے عناصر $a_{ij}=\frac{1}{2}|i-3j|$ سے دئے گیے ہیں۔

حل عام طور پر ایک 2×3 ماترس $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}$ سے دی جاتی ہے۔

اب $a_{ij}=\frac{1}{2}|i-3j|, i=1, 2, 3$ اور $j=1,2$

اس لئے $a_{11}=\frac{1}{2}|1-3\times 1|=1$

$$a_{21}=\frac{1}{2}|2-3\times 1|=\frac{1}{2} \qquad a_{22}=\frac{1}{2}|2-3\times 2|=2$$

$$a_{31}=\frac{1}{2}|3-3\times 1|=0 \qquad a_{32}=\frac{1}{2}|3-3\times 2|=\frac{3}{2}$$

اس طرح مطلوبہ ماترس $A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2}\\ \frac{1}{2} & 2\\ 0 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$ سے دی گئی ہے۔

3.3 ماترس کی قسمیں

اس حصے میں ہم ماترس کی مختلف قسموں پر بحث و مباحثہ کریں گے۔

(i) کالم ماترس

ایک ماترس کو اس وقت کالم ماترس کہا جاتا ہے اگر اس میں صرف ایک کالم ہو۔

مثال کے طور پر $A=\begin{bmatrix} 0\\ \sqrt{3}\\ -1\\ 1/2\end{bmatrix}$ ایک 4×1 ترتیب کی کالم ماترس ہے۔

عام طور پر $A=[a_{ij}]_{m\times 1}$ ایک $m\times 1$ ترتیب کی کالم ماترس ہے۔

(ii) قطار ماترس

ایک ماترس کو اس وقت قطار ماترس کہا جاتا ہے اگر اس میں صرف ایک قطار ہو

مثال کے طور پر $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{5} & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 4}$ ایک قطار ماترس ہے۔

عام طور پر $B = [b_{ij}]_{i\times n}$ ایک $1\times n$ ترتیب کی قطار ماترس ہے۔

(iii) مربع ماترس

ایک ماترس جس میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر ہو مربع ماترس کہلاتی ہے۔اس طرح $m\times n$ ماترس ایک مربع ماترس کہلاتی ہے اگر $m = n$ ہو اور n ترتیب مربع ماترس کہلاتی ہے۔

مثال کے طور پر $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 3\sqrt{2} & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ ایک رتبہ 3 کی مربع ماترس ہے۔

عام طور پر $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ ایک m ترتیب مربع ماترس ہے۔

> **نوٹ** اگر $A = [a_{ij}]$ ایک ترتیب n کی مربع ماترس ہے، تب عناصر (درج آنکڑے) $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ ایک ماترس A کا وتر بناتے ہیں۔اس طرح اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ تب A کے وتری عناصر 1،4،6 ہیں۔

(iv) وتری ماترس

ایک مربع ماترس $B = [b_{ij}]_{m\times m}$ اس وقت وتری ماترس کہلائے گی اگر اس کے تمام غیر وتری عناصر صفر ہیں، اس کا مطلب ہے $B = [b_{ij}]_{m\times m}$ ایک وتری ماترس ہے اگر $b_{ij} = 0$، جب کہ $i \neq j$۔

مثال کے طور پر $A = [4], B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} -1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

1،2،3 رتبہ کی ماترس ہیں۔

(v) عددیہ ماترس

ایک وتری ماترس کو عددیہ ماترس کہا جاتا ہے اگر اس کے وتری عناصر مساوی ہیں، اس کا مطلب ہے، ایک مربع ماترس $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ ایک عددیہ ماترس کہلاتی ہے اگر

$b_{ij} = 0$ جب کہ $i \neq j$

$b_{ij} = k$ جب کہ $i = j$ کچھ مقرر عددیہ k کے لیے

مثال کے طور پر

$$A=[3],\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$$

بالترتیب عددیہ ماترس ہیں 1,2 اور 3 ترتیب کی۔

(vi) اکائی ماترس

ایک مربع ماترس جس کے تمام وتری عناصر 1 ہیں دوسرے تمام عنصر صفر ہیں ایک اکائی ماترس کہلاتی ہے۔ دوسرے الفاظ میں، مربع ماترس $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ایک اکائی ماترس ہے۔ اگر $a_{ij} = \begin{cases}1 & \text{if} \quad i = j\\ 0 & \text{if} \quad i \neq j\end{cases}$

ہم n رتبہ والی اکائی ماترس کو I_n سے ظاہر کرتے ہیں۔ جب الفاظ کے پھیر بدل سے ترتیب صاف ہو جائے۔ ہم اسے سادہ طریقے I لکھتے ہیں۔

مثال کے طور پر $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, [1]$ بالترتیب 1,2 اور 3 رتبہ والی اکائی ماترس ہیں۔

اس بات کا مشاہدہ کیجیے کہ جب $k = 1$ ہو تو یہ عددیہ ماترس ایک اکائی ماترس ہے۔ لیکن ہر ایک اکائی ماترس صاف طور پر ایک عددیہ ماترس ہے۔

(vii) صفر ماترس

ایک ماترس صفر ماترس یا عدیم (null) ماترس کہلاتی ہے اگر اس کے تمام عنصر صفر ہوں۔

مثال کے طور پر $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, [0] تمام صفر ماترس ہیں ہم صفر ماترس کو O سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس

کا رتبہ اس کے سیاق سے صاف ہو جائے گا۔

3.3.1 ماترس کی برابری

تعریف 2 دو ماترس $A = [a_{ij}]$ اور $B = [b_{ij}]$ اس وقت برابر کہلاتی ہیں اگر

(i) وہ یکساں درجہ کی ہوں

(ii) A کا ہر عنصر B کے نظیری عنصر کے برابر ہو، اس کا مطلب $a_{ij} = b_{ij}$ تمام i اور j کے لئے۔

مثال کے طور پر $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ برابر ماترس ہیں لیکن $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ برابر ماترس نہیں ہیں۔

علامتی طور پر، اگر دو ماترس A اور B برابر ہیں، ہم لکھتے $A = B$۔

اگر $\begin{bmatrix} x & y \\ z & a \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 \\ 2 & \sqrt{6} \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ تب $x = -1.5, y = 0, z = 2, a = \qquad b = 3, c = 2$

مثال 4 اگر

$$\begin{bmatrix} x+3 & z+4 & 2y-7 \\ -6 & a-1 & 0 \\ b-3 & -21 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3y-2 \\ -6 & -3 & 2c+2 \\ 2b+4 & -21 & 0 \end{bmatrix}$$

a,b,c,x,y اور z کی قدریں معلوم کیجیے۔

حل جیسا کہ دی ہوئی ماترس برابر ہیں، اس لئے ان کے مطابق عناصر بھی برابر ہوں گے مطابق عناصر کا موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x + 3 = 0, \qquad z + 4 = 6, \qquad 2y - 7 = 3y - 2$$
$$a - 1 = -3, \qquad 0 = 2c + 2 \qquad b - 3 = 2b + 4,$$

آسان کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے،

$$a = -2, b = -7, c = -1, x = -3, y = -5, z = 2$$

مثال 5 ذیل مساوات سے a, b, c اور d کی قدریں معلوم کیجیے۔

$$\begin{bmatrix} 2a+b & a-2b \\ 5c-d & 4c+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 11 & 24 \end{bmatrix}$$

حل دو ماترس کی برابری سے، نظیری عناصر کی برابری کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$2a + b = 4 \qquad 5c - d = 11$

$a - 2b = -3 \qquad 4c + 3d = 24$

ان مساوات کو حل کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$a = 1, b = 2, c = 3$ اور $d = 4$

مشق 3.1

1۔ ماترس $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 19 & -7 \\ 35 & -2 & \frac{5}{2} & 12 \\ \sqrt{3} & 1 & -5 & 17 \end{bmatrix}$ میں لکھیے۔

(i) ماترس کی ترتیب (ii) عناصر کی تعداد

(iii) $a_{13}, a_{21}, a_{33}, a_{24}, a_{23}$ کے عناصر لکھیے۔

2۔ اگر ایک ماترس میں 24 عنصر ہیں، اس میں کتنے مناسب رتبہ ہوں گے؟ اور اگر 13 عنصر ہیں، تو کتنے؟

3۔ اگر ایک ماترس میں 18 عناصر ہیں، کتنی ممکن رتبہ اس میں موجود ہیں؟ اور اگر 5 عنصر ہیں تو کتنی؟

4۔ ایک ماترس $A = [a_{ij}]$، 2×2 کی بنائیے۔ جن کے عناصر اس طرح دئے گیے ہیں۔

(i) $a_{ij} = \dfrac{(i+j)^2}{2}$ (ii) $a_{ij} = \dfrac{i}{j}$ (iii) $a_{ij} = \dfrac{(i+2j)^2}{2}$

5۔ ایک ماترس 3×4 کی بنائیے، جس کے عناصر اس طرح دئے گئے ہیں۔

(i) $a_{ij} = \dfrac{1}{2}|-3i + j|$ (ii) $a_{ij} = 2i - j$

6۔ ذیل مساوات سے x, y اور z کی قدریں معلوم کیجیے۔

(i) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

7۔ a, b, c اور d کی قدریں ذیل مساوات سے معلوم کیجیے۔

$$\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$$

8۔ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ایک مربع ماترس ہے، اگر

(A) $m < n$ (B) $m > n$ (C) $m = n$ (D) ان میں سے کوئی بھی نہیں

9۔ دی ہوئی x اور y کی کن قدروں سے ذیل ماترس کا جوڑا برابر ہے۔

$$\begin{bmatrix} 0 & y-2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{bmatrix}$$

(A) $x = \frac{-1}{3}, \quad y = 7$ (B) دریافت کرنا ممکن نہیں ہے۔

(C) $y = 7, \quad x = \frac{-2}{3}$ (D) $x = \frac{-1}{3}, \quad y = \frac{-2}{3}$

10۔ تمام ممکن ماترس کی 3×3 ترتیب والی تعداد جس میں ہر اندراج 0 یا 1 نظر آتا ہے۔

(A) 27 (B) 18 (C) 81 (D) 512

3.4 ماترس پر عمل

اس شعبہ میں، ہم ماترس پر کچھ عمائل کا تعارف کرائیں گے، جس کے نام ہیں، ماترس کا جوڑ، ماترس کی ایک عددیہ سے ضرب ماترس کے فرق اور ضرب۔

3.4.1 ماترس کی جمع

مان لیجیے فاطمہ کے پاس دو جگہوں A اور B پر کارخانے ہیں۔ ہر ایک کارخانہ میں تین مختلف قیمتوں والے لڑکے اور لڑکیوں کے لیے کھیل کے جوتے جنہیں 1,2 اور 3 قسموں میں رکھا گیا ہے، تیار کرتی ہے۔ تینوں کارخانوں میں تیار شدہ جوتوں کی تعداد ایک ماترس کے ذریعے نیچے دکھائی گئی ہے:

$$\text{A پر فیکٹری} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{لڑکے} & \text{لڑکیاں} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 90 & 50 \\ 70 & 55 \\ 75 & 75 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \text{B پر فیکٹری} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{لڑکے} & \text{لڑکیاں} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 80 & 60 \\ 75 & 65 \\ 90 & 85 \end{bmatrix} \end{array}$$

مان لیجیے فاطمہ یہ جاننا چاہتی ہے کہ ہر ایک قیمت والے زمرے میں کل کتنے کھیل کے جوتے تیار ہوتے ہیں۔ تب کل تیار ہونے والے جوتے

قسم 1 میں : لڑکوں کے لئے (80 + 90)، لڑکیوں کے لئے (60 + 50)

قسم 2 میں : لڑکوں کے لئے (75 + 70) لڑکیوں کے لئے (65 + 55)

قسم 3 میں : لڑکوں کے لئے (90 + 75)، لڑکیوں کے لئے (85 + 75)

اسے ماترس کی شکل میں اس طرح دکھایا جاسکتا ہے $\begin{bmatrix} 80+90 & 60+50 \\ 75+70 & 65+55 \\ 90+75 & 85+75 \end{bmatrix}$ ۔

یہ نئی ماترس اوپر کی دو ماترس کا حاصل جمع ہے۔ ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ دو ماترس کا حاصل جمع ایک ماترس ہے جو کہ دی ہوئی ماترس کے مطابق عناصر کو جمع کرکے حاصل ہوتا ہے۔ مزید، دونوں ماترس اسی درجہ کی ہوں گی۔

اس طرح اگر $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ ایک 2×3 ماترس ہے اور $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$ ایک دوسری 2×3 ماترس ہے تب ہم بیان کرتے ہیں $A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$

عام طور پر اگر $A = [a_{ij}]$ اور $A = [b_{ij}]$ یکساں ترتیب، مان لیجئے $m \times n$ دائمی دو ماترس ہیں تب، دو ماترس A اور B کا حاصل جمع ماترس $C = [c_{ij}]$ سے دکھایا جاسکتا ہے، جہاں $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ سے دکھایا جاسکتا ہے، جہاں $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$، تمام قدروں i اور j کی ممکن قدروں کے لیے۔

مثال 6 $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5} & 1 \\ -2 & 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ دیا ہوا ہے، $A + B$ معلوم کیجیے۔

کیوں کہ A اور B یکساں ترتیب 2×3 کے ہیں۔ اس لئے A اور B کا حاصل جمع ہے۔

$$A+B = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{5} & 1-1 \\ 2-2 & 3+3 & 0+\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 6 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

نوٹ

1. ہم اس بات پر زور دیتے ہیں کہ اگر A اور B یکساں رتبہ کے نہیں ہیں، تب A+B معرف نہیں کیا جاسکتا ہے۔

مثال کے طور پر اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ تب A+B معرف نہیں کیا جا سکتا ہے۔

2. ہم اس بات کا مشاہدہ کرسکتے ہیں کہ ماترس کا حاصل جمع دو رکنی عمل کی ایک مثال ہے ماترس کے یکساں درجہ والے سیٹ پر

3.4.2 ایک ماترس کی عددیہ سے ضرب

مان لیجیے کہ فاطمہ نے فیکٹری A میں تمام طرح کے جوتوں کا بنانا دوگنا کر دیا (3.4.1 کے حوالے سے)

پہلے فیکٹری A کے ذریعہ بنائی گئی تعداد معیاری اکائی میں مندرجہ ذیل تھیں۔

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{لڑکے} & \text{لڑکیاں} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 80 & 60 \\ 75 & 65 \\ 90 & 85 \end{bmatrix} \end{array}$$

فیکٹری A میں دہرائی گئی تعداد ذیل میں دی گئی ہے۔

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{لڑکے} & \text{لڑکیاں} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 2\times 80 & 2\times 60 \\ 2\times 75 & 2\times 65 \\ 2\times 90 & 2\times 85 \end{bmatrix} \end{array}$$

اسے ماترس کی شکل میں اس طرح $\begin{bmatrix} 160 & 120 \\ 150 & 130 \\ 180 & 170 \end{bmatrix}$ دکھایا جا سکتا ہے۔

ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ نئی ماترس پچھلی ماترس کے ہر عنصر کو 2 سے ضرب کرنے پر حاصل کی گئی ہے۔

عام طور پر، ہم ایک ماترس کی ضرب عددیہ سے اس طرح بیان کرتے ہیں: اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ایک ماترس ہے اور k ایک عددیہ ہے، تب kA ایک دوسری ماترس ہے جو کہ A کے ہر عنصر کو عددیہ k سے ضرب کرنے پر حاصل ہوا ہے۔

دوسرے الفاظ میں، $kA = k[a_{ij}]_{m\times n} = [k(a_{ij})]_{m\times n}$ اس کا مطلب ہے kA کا $(i, j)^{th}$ عنصر ka_{ij} ہے تمام ممکن قدروں i اور j کے لئے

مثال کے طور پر اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.5 \\ \sqrt{5} & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$، تب

$$3A = 3\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.5 \\ \sqrt{5} & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 4.5 \\ 3\sqrt{5} & 21 & -9 \\ 6 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

ایک ماترس کا منفی (Negative of a matrix) ماترس A کے منفی کو $-A$ سے ظاہر کیا جاتا ہے ہم بیان کرتے ہیں

$-A = (-1)A$

مثال کے طور پر، مان لیجیے $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & x \end{bmatrix}$ تب $-A$ اس طرح دیا گیا ہے۔

$$-A = (-1)A = (-1)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & -x \end{bmatrix}$$

ماترس کی تفریق (Difference of matrices) اگر $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ یکساں رتبہ کی ماترس ہیں، مان لیجیے $m \times n$ تب فرق $A - B$ کو ماترس $D = [d_{ij}]$ سے ظاہر کرتے ہیں، جہاں $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ اور i اور j کی تمام قدروں کے لیے۔

دوسرے الفاظ میں $D = A - B = A + (-1)B$ کہ یہ ماترس A اور ماترس $-B$ کا حاصل جمع ہے۔

مثال 7 اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ہو تب $2A - B$ دریافت کیجیے۔

حل ہمارے پاس ہے

$$2A - B = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-3 & 4+1 & 6-3 \\ 4+1 & 6+0 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

3.4.3 ماترس کے حاصل جمع کی خصوصیات

ماترس کا حاصل جمع ذیل خصوصیات کو مطمئن کرتا ہے۔

(i) **تقلیبی قانون (Commutative Law)** اگر $A = (a_{ij}), B = [b_{ij}]$ یکساں رتبہ کی ماترس ہیں، مان لیجیے $m \times n$

تب $A + B = B + A$

اب $A+B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$

$= [b_{ij} + a_{ij}]$ (اعداد کا مجموعہ تقلیبی ہوتا ہے)

$= ([b_{ij}] + [a_{ij}]) = B + A$

(ii) **تلازمی قانون (Associative Law)** کن ہی تین ماترس $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] C = [c_{ij}]$ یکساں رتبہ کی ماترس ہیں، مان لیجیے $m \times n$ تب $(A + B) + C = A + (B + C)$

اب $(A+B)+C = ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}]$

$= [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]$

$= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]$ (کیوں؟)

$= [a_{ij}] + [(b_{ij} + c_{ij})] = ([b_{ij}] + [c_{ij}]) = A + (B + C)$

(iii) **جمعی تماثلہ کا وجود (Existence of additive identity)** مان لیجیے $A = [a_{ij}]$ ایک $m \times n$ ماترس اور O ایک $m \times n$، صفر ماترس ہے تب $A + O = O + A = A$ دوسرے الفاظ میں O ماترس کی جمع کے لیے جمعی تماثلہ ہے۔

(iv) **جمعی معکوس کا وجود (The existence of additive inverse)** مان لیجیے $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ کوئی بھی ایک ماترس ہے، تم ہمارے پاس ایک دوسری ماترس $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$ ہے تاکہ $A+(-A)=(-A)+A=O$ اس طرح $(-A)$، A کا جمعی معکوس ہے یا A کا منفی۔

3.4.4 ایک ماترس کی عددیہ ضرب کی خصوصیات

اگر $A = [a_{ij}]$ اور $B = [b_{ij}]$ یکساں رتبہ کے دو ماترس ہیں، کہنے کے لیے $m \times n$ اور k اور l عددیہ ہیں، تب

(i) $k(A + B) = kA + kB$ (ii) $(k + l)A = kA + lA$

(ii) $k(A + B) = k([a_{ij}] + [b_{ij}])$

$= k[a_{ij} + b_{ij}] = [k(a_{ij} + b_{ij})] = [(k\, a_{ij}) + (k\, b_{ij})]$

$= [ka_{ij}] + [k\, b_{ij}] = k[a_{ij}] + k[b_{ij}] = kA + kB$

(iii) $(k+l)\text{A} = (k+l)\,[a_{ij}]$

$$= [(k+l)a_{ij}] + [ka_{ij}] + [la_{ij}] = k[a_{ij}] + l[a_{ij}] = k\text{A} + l\text{A}$$

مثال 8 اگر $\text{A} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ اور $\text{B} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ ہو تب ماترس x معلوم کیجیے، تا کہ $2\text{A}+3\text{X}=5\text{B}$ ہو۔

حل ہمارے پاس ہے $2\text{A} + 3\text{X} = 5\text{B}$

یا $2\text{A} + 3\text{X} - 2\text{A} = 5\text{B} - 2\text{A}$

یا $2\text{A} - 2\text{A} + 3\text{X} = 5\text{B} - 2\text{A}$ (ماترس جمع تقلیبی ہے)

یا $\text{O} + 3\text{X} = 5\text{B} - 2\text{A}$ (2A، -2A کا جمعی معکوس ہے)

یا $3\text{X} = 5\text{B} - 2\text{A}$ (O جمعی تماثلہ ہے)

یا $\text{X} = \frac{1}{3}(5\text{B} - 2\text{A})$

یا
$$\text{X} = \frac{1}{3}\left(5\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 20 & 10 \\ -25 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ -8 & 4 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 10-16 & -10+0 \\ 20-8 & 10+4 \\ -25-6 & 5-12 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & -10 \\ 12 & 14 \\ -31 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{-10}{3} \\ 4 & \frac{14}{3} \\ \frac{-31}{3} & \frac{-7}{3} \end{bmatrix}$$

مثال 9 X اور Y کی قدر معلوم کیجیے اگر $\text{X} + \text{Y} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ اور $\text{X} - \text{Y} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

حل ہمارے پاس ہے $(\text{X}+\text{Y}) + (\text{X}-\text{Y}) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

یا $(\text{X}+\text{Y}) + (\text{Y}-\text{Y}) = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow 2\text{X} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

یا
$$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ساتھ ہی
$$(X+Y)-(X-Y) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

یا
$$(X-X)+(Y+Y) = \begin{bmatrix} 5-3 & 2-6 \\ 0 & 9+1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2Y = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

یا
$$Y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

مثال 10 ذیل مساوات سے x اور y کی قدریں معلوم کیجیے۔

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

حل ہمارے پاس ہے

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x & 10 \\ 14 & 2y-6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

یا
$$\begin{bmatrix} 2x+3 & 10-4 \\ 14+1 & 2y-6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x+3 & 6 \\ 15 & 2y-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

یا $2x+3=7$ اور $2y-4=14$ (کیوں؟)

یا $2x=7-3$ اور $2y=18$

یا $x=\frac{4}{2}$ اور $y=\frac{18}{2}$

یعنی $x=2$ اور $y=9$

مثال 11 دو کسان رام کشن اور گرچرن سنگھ چاولوں کی صرف تین قسموں باسمتی، پرمل ورنورا کی کھیتی کرتے ہیں۔ چاول کی ان قسموں کی فروخت (روپیوں میں) دونوں کسانوں کے ذریعے ستمبر اور اکتوبر کے مہینے میں ذیل ماترس A اور B کے ذریعے دی گئی ہیں۔

ستمبر کے مہینے میں فروخت (روپیوں میں)

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} \text{باسمتی} & \text{پرمل} & \text{نورا} \end{array}$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 10,000 & 20,000 & 30,000 \\ 50,000 & 30,000 & 10,000 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{رام کشن} \\ \text{گُرچرن سنگھ} \end{array}$$

اکتوبر کے مہینے میں فروخت (روپیوں میں)

$$\begin{array}{ccc} \text{باسمتی} & \text{پرمل} & \text{نورا} \end{array}$$

$$B = \left[\begin{array}{ccc} 5000 & 10,000 & 6000 \\ 20,000 & 10,000 & 10,000 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{رام کشن} \\ \text{گُرچرن سنگھ} \end{array}$$

(i) ہر ایک کسان کی ہر ایک قسم کی مجموعہ فروخت ستمبر اور اکتوبر میں معلوم کیجیے۔

(ii) ستمبر سے اکتوبر میں فروخت میں کمی دریافت کیجیے۔

(iii) اگر ہر ایک کسان کی مجموعی فروخت پر 2% کا منافع حاصل کرتا ہے تو ہر ایک کسان کا ہر ایک قسم کے لئے اکتوبر کے مہینے کا منافع معلوم کیجیے۔

حل

(i) ہر ایک کسان کی مجموعی فروخت ہر ایک قسم میں ستمبر اور اکتوبر کے مہینے میں اس طرح دی گئی ہے۔

$$\begin{array}{ccc} \text{باسمتی} & \text{پرمل} & \text{نورا} \end{array}$$

$$A + B = \left[\begin{array}{ccc} 15,000 & 30,000 & 36,000 \\ 70,000 & 40,000 & 20,000 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{رام کشن} \\ \text{گُرچرن سنگھ} \end{array}$$

(ii) ستمبر سے اکتوبر تک فروخت اس طرح دی گئی ہے۔

$$\begin{array}{ccc} \text{باسمتی} & \text{پرمل} & \text{نورا} \end{array}$$

$$A - B = \left[\begin{array}{ccc} 5000 & 10,000 & 24,000 \\ 30,000 & 20,000 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{رام کشن} \\ \text{گُرچرن سنگھ} \end{array}$$

(iii) 2% کا $B = \frac{2}{100} \times B = 02 \times B$

$$\begin{array}{ccc} \text{باسمتی} & \text{پرمل} & \text{نورا} \end{array}$$

$$= 0.02 \left[\begin{array}{ccc} 5000 & 10,000 & 6000 \\ 20,000 & 10,000 & 10,000 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{رام کشن} \\ \text{گُرچرن سنگھ} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ccc|} & \text{نورا} & \text{پرمل} & \text{باسمتی} \\ \text{رام کشن} & \left[\begin{array}{ccc} 120 & 200 & 100 \\ 200 & 200 & 400 \end{array}\right] \\ \text{گُرچرن سنگھ} & \end{array}$$

اس طرح رام کشن کو اکتوبر کے مہینے میں بطور منافع کے 100 روپے بالترتیب 200 روپے اور 120 روپے چاول کی ہر ایک قسم کے بیچنے میں ملتے ہیں ،اور گرچرن سنگھ کو اس مہینے میں بطور منافع کے بالترتیب 400 روپے ،200 روپے اور 200 روپے چاول کی ہر ایک قسم کے بیچنے میں ملتے ہیں۔

3.4.5 ماترس کی ضرب

مان لیجئے میرا اور ندیم دو دوست ہیں، میرا دو پین اور تین کہانیوں کی کتابیں خریدنا چاہتی ہے، جب کہ ندیم کو 8 پینوں اور 10 کہانیوں کی کتابوں کی ضرورت ہے۔ دونوں ایک دکان پر قیمتیں پتہ کرنے کے لیے گئے جو ذیل میں دی گئی ہیں۔

ایک پین– پانچ روپے کا، کہانی کی ایک کتاب– 40 روپے۔

ہر ایک کو کتنا پیسہ خرچ کرنے کی ضرورت ہے؟ صاف طور پر، میرا کو ضرورت ہے روپیہ $(5 \times 2 + 50 \times 5)$ وہ ہے 260 روپے، جب کہ ندیم کو ضرورت ہے $(8 \times 5 + 50 \times 10)$ روپے، وہ ہے 540 روپے۔ ماترس ظاہر کرنے کے لئے ،ہم اوپر دی ہوئی معلومات کو ذیل طریقے سے لکھ سکتے ہیں۔

پیسہ کی ضرورت (روپیوں میں) ہر اشیاء کی قیمت (روپیوں میں) ضرورت ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 50 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5\times 2+5\times 50 \\ 8\times 5+10\times 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 260 \\ 540 \end{bmatrix}$$

مان لیجئے کہ ایک دوسری دکان سے وہ قیمتیں دریافت کرتے ہیں، جو کہ ذیل ہیں۔

پین– ہر ایک پانچ روپے کا، کہانی کی کتاب– ہر ایک 40 روپے کی

اب میرا اور ندیم کو خریداری کرنے کے لئے بالترتیب $(4\times2+40\times5)$ روپے $=208$ روپے اور $(8\times4+10\times40)=$ 432 روپے کی ضرورت ہوگی۔

اس کے آگے اوپر دی ہوئی معلومات کو ذیل طریقے سے دکھایا جا سکتا ہے۔

ضرورتیں (روپیوں میں) ہر اشیاء کی قیمت (روپیوں میں) پیسہ کی ضرورت

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 \\ 40 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4\times2+40\times5 \\ 8\times4+10\times40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208 \\ 432 \end{bmatrix}$$

اب دونوں حالات میں دی گئی معلومات کا مجموعہ کر کے ماترس کے طریقے سے ذیل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

ضرورتیں فی اشیاء کی قیمت (روپیوں میں) پیسہ کی ضرورت (روپیوں میں)

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 50 & 40 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5\times2+5\times50 & 4\times2+40\times5 \\ 8\times5+10\times50 & 8\times4+10\times40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 260 & 208 \\ 540 & 432 \end{bmatrix}$$

اوپر ماترس کی ضرب کی ایک مثال ہے۔ ہم اس بات کا مشاہدہ کرتے ہیں کہ، دو ماترس A اور B کو ضرب کرنے کے لئے، ماترس A میں کالموں کی تعداد ماترس B میں قطاروں کی تعداد کے برابر ہونی چاہیے۔ اس کے آگے حاصل ضرب ماترس کے اعداد نکالنے کے لئے، ہم A کی قطاریں اور B کے کالم لیتے ہیں۔ ہر عنصر کی ضرب کرتے ہیں اور مجموعہ لیتے ہیں۔ قانون کے حساب سے، ہم ماترس کے ضرب کی تعریف آگے دیے گیے طریقے کی طرح بیان کرتے ہیں۔

دو ماترس کا حاصل ضرب بیان کیا جا سکتا ہے اگر A میں موجود کالم کی تعداد B میں موجود قطاروں کی تعداد کے برابر ہے۔ مان لیجئے $A = [a_{ij}]$ ایک $m \times n$ ماترس ہے اور $B = [b_{jk}]$ ایک $n \times p$ ماترس ہے۔ تب A اور B ماترس کا حاصل ضرب ماترس C ہے جب کی ترتیب $m \times p$ ہے۔ ماترس C کا $(i, k)^{th}$ عنصر c_{ik} معلوم کرنے کے لئے ہم A کی i^{th} قطار لیتے ہیں اور B کا k^{th} کالم، انہیں عنصر کے حساب سے ضرب کرتے ہیں اور پھر تمام ضریب کا مجموعہ لیتے ہیں۔ دوسرے الفاظ میں، اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{ij}]_{n\times p}$ ہو تو A کی i^{th} قطار $[a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in}]$ اور B کا کالم k^{th} برابر ہے

$$\begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}، \text{تب} \quad c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$$

ماترس $C = [c_{ik}]_{m\times p}$ A اور B کا حاصل ضرب ہے۔

مثال کے طور پر اگر $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ اور $D = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ ہے تب CD حاصل ضرب اس طرح معرف کیا

جاتا ہے $CD = \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 7\\ -1 & 1\\ 5 & -4\end{bmatrix}$ یہ ایک 2×2 ماترس ہے جس میں ہر اندراج C کی کچھ قطار اور کچھ کالم D کے نیچے کے مطابق حاصل ضرب کا جمع ہے۔ یہ چار تحسیبات ہیں۔

پہلی قطار اور پہلے کالم میں اندراج
$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 7\\ -1 & 1\\ 5 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(1)\,(2) + (-1)\,(-1) + (2)\,(5) & ?\\ ? & ?\end{bmatrix}$$

پہلی قطار اور دوسرے کالم میں اندراج
$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 7\\ -1 & 1\\ 5 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13 & (1)\,(7) + (-1)\,(1) + 2\,(-4)\\ ? & ?\end{bmatrix}$$

دوسری قطار اور پہلے کالم میں اندراج
$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 7\\ -1 & 1\\ 5 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13 & -2\\ 0\,(2) + 3(-1) + 4\,(5) & ?\end{bmatrix}$$

دوسری قطار اور دوسرے کالم میں اندراج
$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 7\\ -1 & 1\\ 5 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13 & -2\\ 17 & 0\,(7) + 3(1) + 4\,(-4)\end{bmatrix}$$

اس طرح $CD = \begin{bmatrix}13 & -2\\ 17 & -13\end{bmatrix}$

مثال 12 AB معلوم کیجیے، اگر $A = \begin{bmatrix}6 & 9\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix}2 & 6 & 0\\ 7 & 9 & 8\end{bmatrix}$ ہے۔

حل ماترس A میں 2 کالم ہیں جو کہ ماترس B کی قطاروں کے برابر ہیں۔

اس طرح AB اس طرح معرف کیا جاتا ہے۔ اب

$$AB = \begin{bmatrix}6(2)+9(7) & 6(6)+9(9) & 6(0)+9(8)\\ 2(2)+3(7) & 2(6)+3(9) & 2(0)+3(8)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}12+63 & 36+81 & 0+72\\ 4+21 & 12+27 & 0+24\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}75 & 117 & 72\\ 25 & 39 & 24\end{bmatrix}$$

ریمارک اگر AB کو معرف کیا گیا ہے، تب BA کا معرف ہونا ضروری نہیں ہے۔ اوپر کی مثال میں AB معرف کیا گیا ہے (صحیح ہے) لیکن AB معرف نہیں کیا جا سکتا کیونکہ B میں 3 کالم ہیں جب کہ A میں صرف 2 قطاریں ہیں (اور 3 نہیں ہیں)۔
اگر A اور B بالترتیب $m\times n$، $k\times l$ ماترس ہیں، تب AB اور BA بیان کئے گئے ہیں اگر اور صرف اگر $n=k$ اور $l=m$ ہیں۔ خاص

طور پر اگر دونوں A اور B یکساں ترتیب والے مربع ماترس ہیں، تب دونوں AB اور BA معرف کئے گیے ہیں۔

ماترس کی ضرب کی منفی تقلیبی خصوصیت

اب، ہم ایک مثال کے ذریعے دیکھیں گے کہ اگر AB اور BA معرف کئے جا سکتے ہیں، تب بھی یہ ضروری نہیں ہے کہ $AB = BA$

مثال 13 اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ہیں تب AB اور BA کو معلوم کیجیے۔ دکھائیے کہ $AB \neq BA$

حل کیونکہ A ایک 2×3 ماترس ہے اور B ایک 3×2 ماترس ہے۔ اس لیے AB اور BA دونوں معرف کئے گئے ہیں اور یہ بالترتیب 2×2 اور 3×3 ترتیب کی ماترس ہیں۔ غور کیجیے کہ

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-8+6 & 3-10+3 \\ -8+8+10 & -12+10+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$

اور

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-12 & -4+6 & 6+15 \\ 4-20 & -8+10 & 12+25 \\ 2-4 & -4+2 & 6+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 2 & 21 \\ -16 & 2 & 37 \\ -2 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

صاف طور پر $AB \neq BA$

اوپر کی مثالوں میں دونوں AB اور BA مختلف ترتیب کے ہیں اور اس لیے $AB \neq BA$۔ لیکن کوئی بھی یہ سوچ سکتا ہے کہ ہوسکتا ہے AB اور BA یکساں ہوتے اگر وہ یکساں ترتیب کے ہوتے۔ لیکن ایسا نہیں ہے، یہاں ہم نے ایک مثال دی ہے یہ دکھانے کے لیے کہ اگر AB اور BA یکساں رتبہ کے بھی ہوں تو ضروری نہیں کہ وہ برابر ہوں گے۔

مثال 14 اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ہوں تب $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

اور $BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ہے۔

صاف طور پر $AB \neq BA$

اس طرح ماترس کی ضرب تقلیبی نہیں ہے۔

نوٹ اس کا مطلب یہ نہیں کہ $AB \neq BA$، A، B کے ماترس کے ہر جوڑے کے لیے جس کے لیے AB اور BA دونوں کو معرف کیا گیا ہے۔ ایک لمحہ کے لیے

اگر $B=\begin{bmatrix}3&0\\0&4\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$ تب $AB=BA=\begin{bmatrix}3&0\\0&8\end{bmatrix}$

مشاہدہ کیجیے کہ یکساں رتبہ والی وتری ماترس تقلیبی ہوں گی۔

صفر ماترس دو غیر صفر والی ماترس کے حاصل ضرب کے طور پر

ہم جانتے ہیں کہ، حقیقی اعداد a اور b کے لیے اگر $ab = 0$، تب یا تو $a = 0$ یا $b = 0$ ہوگا۔ یہ ماترس کے لیے صحیح نہیں ہے، ہم اس کا مشاہدہ ایک مثال کے ذریعے کریں گے۔

مثال 15 AB دریافت کیجیے، اگر $A=\begin{bmatrix}0&-1\\0&2\end{bmatrix}$ اور $B=\begin{bmatrix}3&5\\0&0\end{bmatrix}$ ہوں

حل ہمارے پاس ہے $AB=\begin{bmatrix}0&-1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&5\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

اس طرح اگر دو ماترس کا حاصل ضرب صفر ماترس ہے، تو یہ ضروری نہیں ہے کہ ایک ماترس صفر ماترس ہے۔

3.4.6 ماترس کی ضرب کی خصوصیات

1۔ **تلازمی اصول:** کوئی بھی تین ماترس A,B اور C کے لیے۔ ہمارے پاس ہے

(AB)C = A (BC)، جب کہ برابری کے دونوں طرف معرف کئے گئے ہوں۔

2۔ **تقسیمی قانون:** تین ماترس A,B اور C کے لیے

(i) A (B+C) = AB + AC

(i) (A+B) C = AC + BC، جب کہ برابری کی دونوں طرف معرف کی گئی ہوں۔

3۔ **ضربی تماثلہ کا وجود:** کسی بھی مربع ماترس A کے لیے، ایک تماثلی ماترس یکساں رتبہ کی موجود ہے تا کہ IA = AI = A

اب ہم ان خصوصیات کو مثالوں کے ذریعے جانچ کریں گے۔

مثال 16 اگر $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&0&3\\3&-1&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&3\\0&2\\-1&4\end{bmatrix}$ اور $C=\begin{bmatrix}1&2&3&-4\\2&0&-2&1\end{bmatrix}$

(AB)C، A(BC) معلوم کیجیے اور دکھایئے کہ (AB)C = A(BC) ہے۔

حل ہمارے پاس ہے۔

$$AB=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&0&3\\3&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\0&2\\-1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0+1&3+2-4\\2+0-3&6+0+12\\3+0-2&9-2+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&18\\1&15\end{bmatrix}$$

$$(AB)C=\begin{bmatrix}2&1\\-1&18\\1&15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&-4\\2&0&-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+2&4+0&6-2&-8+1\\-1+36&-2+0&-3-36&4+18\\1+30&2+0&3-30&-4+15\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4&4&4&-7\\35&-2&-39&22\\31&2&-27&11\end{bmatrix}$$

اب

$$BC=\begin{bmatrix}1&3\\0&2\\-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&-4\\2&0&-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+6&2+0&3-6&-4+3\\0+4&0+0&0-4&0+2\\-1+8&-2+0&-3-8&4+4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7&2&-3&-1\\4&0&-4&2\\7&-2&-11&8\end{bmatrix}$$

اس لئے

$$A(BC)=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&0&3\\3&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&2&-3&-1\\4&0&-4&2\\7&-2&-11&8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7+4-7&2+0+2&-3-4+11&-1+2-8\\14+0+21&4+0-6&-6+0-33&-2+0+24\\21-4+14&6+0-4&-9+4-22&-3-2+16\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4&4&4&-7\\35&-2&-39&22\\31&2&-27&11\end{bmatrix}$$

صاف طور پر $(AB)\,C = A\ (BC)$

مثال 17 اگر $A=\begin{bmatrix}0&6&7\\-6&0&8\\7&-8&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&2\\1&2&0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2\\-2\\3\end{bmatrix}$ ہوں تو

BC, AC نکالئے اور $(A+B)\,C$ ساتھ ہی دکھایئے کہ $(A+B)C = AC + BC$

حل اب $A+B=\begin{bmatrix}0 & 7 & 8\\ -5 & 0 & 10\\ 8 & -6 & 0\end{bmatrix}$

اس لئے $$(A+B)C\begin{bmatrix}0 & 7 & 8\\ -5 & 0 & 10\\ 8 & -6 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0-14+24\\ -10+0+30\\ 16+12+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 20\\ 28\end{bmatrix}$$

اس کے آگے $$AC=\begin{bmatrix}0 & 6 & 7\\ -6 & 0 & 8\\ 7 & -8 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0-12+21\\ -12+0+24\\ 14+16+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ 12\\ 30\end{bmatrix}$$

اور $$BC=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0-2+3\\ 2+0+6\\ 2-4+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 8\\ -2\end{bmatrix}$$

تا کہ $$AC+BC=\begin{bmatrix}9\\ 12\\ 30\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 8\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 20\\ 28\end{bmatrix}$$

صاف طور پر $(A+B)\,C = AC + BC$

مثال 18 اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & -2 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$ ہوتو دکھایئے کہ $A^3-32A-40\,I=O$

حل ہمارے پاس ہے $$A^2=A.A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & -2 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & -2 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19 & 4 & 8\\ 1 & 12 & 8\\ 14 & 6 & 15\end{bmatrix}$$

اس لئے $$A^3=AA^2=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & -2 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}19 & 4 & 8\\ 1 & 12 & 8\\ 14 & 6 & 15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}63 & 46 & 69\\ 69 & -6 & 23\\ 92 & 46 & 63\end{bmatrix}$$

اب

$$A^3-23A-40I=\begin{bmatrix}63 & 46 & 69\\ 69 & -6 & 23\\ 92 & 46 & 63\end{bmatrix}-23\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & -2 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}-40\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -23 & -46 & -69 \\ -69 & 46 & -23 \\ -92 & -46 & -23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63-23-40 & 46-46+0 & 69-69+0 \\ 69-69+0 & -6+46-40 & 23-23+0 \\ 92-92+0 & 46-46+0 & 63-23-40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

مثال 19 ایک اسمبلی الیکشن میں، ایک سیاسی گروپ نے ایک عوامی تعلقاتی ادارہ کو اپنے امیدوار کی مقبولیت کو تین طریقے سے بڑھانے یعنی، ٹیلیفون گھر کی ٹیلیفون کال اور خطوط کے لیے کرایہ پر لیا ایک رابطہ کی قیمت (پیسوں میں) ایک ماترس میں اس طرح دی گئی ہیں۔

$$A = \begin{array}{c} \text{ہر رابطہ کی قیمت} \\ \begin{bmatrix} 40 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{ٹیلیفون} \\ \text{گھر سے ٹیلیفون (گھر سے بلاوا)} \\ \text{خط} \end{array}$$

X اور Y شہروں میں ہر طرح کے ملنے کے نمبر اس طرح دیئے گئے ہیں۔

$$B = \begin{array}{c} \text{ٹیلیفون} \quad \text{گھر کی کال} \quad \text{خطوط} \\ \begin{bmatrix} 1000 & 500 & 5000 \\ 3000 & 1000 & 10,000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \to X \\ \to Y \end{array}$$

شہر X اور Y میں اس گروپ کے ذریعے خرچ کیا گیا کل پیسہ معلوم کیجیے۔

حل ہمارے پاس ہے۔

$$BA = \begin{bmatrix} 40,000 + 50,000 + 250,000 \\ 120,000 + 100,000 + 500,000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to X \\ \to Y \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 340,000 \\ 720,000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to X \\ \to Y \end{array}$$

اس طرح دو شہروں میں اس گروپ کے ذریعہ کل خرچ کیا گیا پیسہ بالترتیب 340,000 پیسے اور 720,000 پیسے ہے یعنی 3400 روپے اور 7200 روپے۔

مشق 3.2

1۔ مان لیجیے $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

ذیل میں ہر ایک کو معلوم کیجیے۔

(i) $A+B$ (ii) $A-B$ (iii) $3A-C$

(iv) AB (v) BA

2۔ ذیل کی تحسیب کیجیے۔

(i) $\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix}a^2+b^2 & b^2+c^2\\ a^2+c^2 & a^2+b^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2ab & 2bc\\ -2ac & -2ab\end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix}-1 & 4 & -6\\ 8 & 5 & 16\\ 2 & 8 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}12 & 7 & 6\\ 8 & 0 & 5\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix}\cos^2 x & \sin^2 x\\ \sin^2 x & \cos^2 x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sin^2 x & \cos^2 x\\ \cos^2 x & \sin^2 x\end{bmatrix}$

3۔ دکھائے گئے حاصل ضرب کی تحسیب کیجیے۔

(i) $\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3 & 5\\ 0 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 5\end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

4۔ اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$ اور $C=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$ ہوں تب

$(A+B)$ اور $(B-C)$ کا تحسیب کیجیے۔ ساتھ ہی یہ دکھائیے کہ $A+(B-C)=(A+B)-C$

5۔ اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ ہو تب $3A - 5B$ کا حساب لگائیے۔

6۔ $\cos\theta \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} + \sin\theta \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ کو آسان کیجیے۔

7۔ X اور Y معلوم کیجیے اگر

(i) $X + Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ and $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(ii) $2X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ and $3X + 2Y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

8۔ X کی قدر معلوم کیجیے اگر $Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ اور $2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

9۔ X اور Y کی قدر معلوم کیجیے اگر $2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

10۔ مساوات کو x,y,z اور t کے لیے حل کیجیے اگر $2\begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

11۔ اگر $x\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ ہو تو x اور y کی قدریں معلوم کیجیے۔

12۔ دیا ہوا ہے $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$ x,y,z اور w کی قدریں معلوم کیجیے۔

13۔ اگر $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ دکھائیے کہ $F(x)\,F(y) = F(x+y)$

14۔ دکھائیے کہ

(i) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\2&3&4\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\2&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&0\\1&1&0\end{bmatrix} \quad \text{(ii)}$$

15۔ $A^2 - 5A + 6I$ معلوم کیجیے، اگر $A = \begin{bmatrix}2&0&1\\2&1&3\\1&-1&0\end{bmatrix}$ ہو

16۔ اگر $A = \begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&1\\2&0&3\end{bmatrix}$ ہوتو ثابت کیجیے کہ $A^3 - 6A^2 + 7A + 21 = 0$ ہے۔

17۔ اگر $A = \begin{bmatrix}3&-2\\4&-2\end{bmatrix}$ اور $I = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ ہوں، تو k معلوم کیجیے، تاکہ $A^2 = kA - 2I$

18۔ اگر $A = \begin{bmatrix}0 & -\tan\frac{\alpha}{2}\\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0\end{bmatrix}$ اور I ترتیب 2 کی اکائی ماترس ہو، تو دکھایئے کہ

$$I + A = (I - A)\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

19۔ ایک ٹرسٹ فنڈ کے پاس 30,000 روپے ہیں جن کی سرمایہ کاری دو مختلف قسم کے بانڈس میں کرنی ہے۔ پہلا بانڈ سالانہ 5% شرح کی سود ادا کرتا ہے اور دوسرا بانڈ 7% کی شرح سالانہ کے حساب سے سود دیتا ہے، ماترس ضرب کا استعمال کر کے، معلوم کیجیے 30,000 روپے دو طرح کے بانڈ میں کس طرح بانٹے جائیں گے۔ اگر ٹرسٹ فنڈ کی سود کی سالانہ آمدنی ہے۔

(a) 1800 روپے　　　(b) 2000 روپے

20۔ ایک خاص اسکول کی کتابوں کی دکان میں 10 درجن کیمسٹری (علم کیمیائی) کی کتابیں ہیں، 8 درجن فزکس کی، 10 درجن معاشیات کی کتابیں ہیں، ان کی بالترتیب قیمت فروخت 80 روپے، 60 روپے اور 40 روپے ہے۔ ماترس الجبرا کا استعمال کر کے معلوم کیجیے کہ ان سب کتابوں کو فروخت کر کے کتابوں کی دکان کو کل کتنی رقم حاصل ہوگی۔

مان لیجیے W، X , Y, Z اور P بالترتیب $2 \times n, 3 \times k, 2 \times p, n \times 3$ اور $p \times k$ ترتیب کی ماترس ہیں۔ شق 21 اور 22 میں صحیح جواب کو چنیے

21۔ n, k اور p پر پابندی تاکہ $PY + WY$ معرف ہو جائیں، ہے۔

(A) $k = 3, p = n$　　(B) k اختیاری ہے، $p = 2$

(C) p اختیاری ہے، $k = 3$　　(D) $k = 2$، $p = 3$

22۔ اگر $p = n$ ہے، تب ماترس $7X - 5Z$ کا درجہ ہے۔

(A) $p \times 2$　　(B) $2 \times n$　　(C) $n \times 3$　　(D) $0 \times n$

3.5 ایک ماترس کا پلٹاؤ

اس حصہ میں ہم ماترس کے پلٹاؤ کے بارے میں پڑھیں گے اور ماترس کی خاص قسمیں جیسا کہ متشاکل اور اسکیو متشاکل ماترس

تعریف 3: اگر $A = [a_{ij}]$ ایک $m \times n$ ماترس ہے، تب ایک ماترس قطاروں اور کالموں کو A ماترس کے آپس میں بدلنے سے حاصل ہوتی ہے اسے پلٹاؤ ماترس کہتے ہیں۔ ماترس A کا پلٹاؤ A' یا (A^T) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں، اگر $A' = [a_{ij}]_{m \times n}$ تب $A' = [a_{ij}]_{n \times m}$۔ مثال کے طور پر،

اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ \sqrt{3} & 1 \\ 0 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ تب $A' = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 0 \\ 5 & 1 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

3.5.1 ماترس کے پلٹاؤ کی خصوصیات

اب ہم ماترس کے پلٹاؤ کی ذیل خصوصیات بغیر ثبوت کے بیان کریں گے۔ ان سب کو مناسب مثالوں کے ذریعے ثابت کیا جا سکتا ہے۔

کن ہی مناسب رتبہ والے A اور B ماترس کے لئے، ہمارے پاس ہے۔

(i) $(A')' = A$　　(ii) $(KA)' = KA'$ (جہاں k کوئی بھی مقرر ہے)

(iii) $(A+B)' = A' + B'$　　(iv) $(AB)' = B'A'$

مثال 20 اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ہو تب دکھائیے کہ

(i) $(A')' = A$ (ii) $(A+B)' = A' + B'$

(iii) $(KB)' = KB'$، جہاں k کوئی بھی مقررہ ہے۔

حل

(i) ہمارے پاس ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (A')' = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = A$$

اس طرح $(A')' = A$

(ii) ہمارے پاس ہے

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3}-1 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

اس لئے
$$(A+B)' = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ \sqrt{3}-1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

اب
$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

اس لئے
$$A' + B' = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ \sqrt{3}-1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

اس طرح $(A+B)' = A' + B'$

(iii) ہمارے پاس ہے

$$kB = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -k & 2k \\ k & 2k & 4k \end{bmatrix}$$

تب
$$(kB)' = \begin{bmatrix} 2k & k \\ -k & 2k \\ 2k & 4k \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = kB'$$

تا کہ $(kB)' = kB'$

مثال 21 اگر $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ ثابت کیجیے کہ $(AB)' = B'A'$

حل ہمارے پاس ہے

$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

تب

$$AB = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 12 \\ 4 & 12 & -24 \\ 5 & 15 & -30 \end{bmatrix}$$

اب

$$A' = [-2\ 4\ 5], B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$B'A' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{bmatrix} = (AB)'$$

صاف طور پر $(AB)' = B'A'$

3.6 متشاکل اور عوجی متشاکل ماترس (Symmetric and Skew Symmetric Matrices)

تعریف 4 ایک مربع ماترس $A = [a_{ij}]$ کو ایک متشاکل کہا جاتا ہے اگر $A' = A$ اس کا مطلب ہے $[a_{ij}] = [a_{ji}]$، i اور j کی تمام ممکن قدروں کے لیے۔

مثال کے طور پر $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 & 3 \\ 2 & -1.5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ایک متشاکل ماترس ہے کیوں کہ $A' = A$

تعریف 5 ایک مربع ماترس $A = [a_{ij}]$ کو اس وقت عوجی متشاکل ماترس کہا جاتا ہے اگر $A' = -A$ اس کا مطلب ہے $a_{ji} = -a_{ij}$ i اور j کی تمام ممکن قدروں کے لیے۔ اب، اگر ہم $i = j$ رکھیں، ہمارے پاس ہے $a_{ii} = -a_{ii}$ اس لیے

$2a_{ii} = 0$ یا $a_{ii} = 0$ تمام i کے لیے۔

اس کا مطلب ہے عوجی متشاکل ماترس کے تمام وتری عناصر 'صفر' ہیں۔

مثال کے طور پر، ماترس $B = \begin{bmatrix} 0 & e & f \\ -e & 0 & g \\ -f & -g & 0 \end{bmatrix}$ ایک عوجی متشاکل ماترس ہے چونکہ $B' = -B$

اب ہم کچھ متشاکل اور عوجی متشاکل ماترس کے کچھ نتیجے ثابت کرنے جا رہے ہیں۔

مسئلہ 1 کسی بھی مربع ماترس A کے لئے حقیقی اعداد کے اندراج کے ساتھ، $A + A'$ ایک متشاکل ماترس ہے اور $A - A'$ ایک اسکید متشاکل ماترس ہے۔

ثبوت مان لیجیے $B = A + A'$، تب

$$B' = (A + A')'$$

$$= A' + (A')' \quad (\text{کیونکہ } (A + B)' = A' + B')$$

$$= A' + A \quad (\text{کیونکہ } (A')' = A)$$

$$= A + A' \quad (\text{کیونکہ } A + B = B + A)$$

$$= B$$

اس لیے $B = A + A'$ ایک متشاکل ماترس ہے

اب معلوم کیجیے $C = A - A'$

$$C' = (A - A')' = A' - (A')' \quad (\text{کیوں؟})$$

$$= A' - A \quad (\text{کیوں؟})$$

$$= -(A - A') = -C$$

اس لیے $C = A - A'$ ایک اسکیو متشاکل ماترس ہے۔

مسئلہ 2 کسی بھی مربع ماترس کو متشاکل اور عوجی متشاکل ماترس کے مجموعے کے طور پر دکھایا جا سکتا ہے۔

ثبوت مان لیجیے A ایک مربع ماترس ہے، تب ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$$

مسئلہ 1 سے ہم جانتے ہیں کہ $(A + A')$ ایک متشاکل ماترس ہے اور $(A - A')$ ایک عوجی متشاکل ماترس ہے۔ کیونکہ کسی بھی ماترس A کے لیے $(kA)]' = kA'$ اس سے یہ نکلتا ہے کہ $\frac{1}{2}(A + A')$ متشاکل ماترس ہے اور عوجی متشاکل ماترس ہے۔ اس طرح، کسی بھی مربع ماترس کو متشاکل ماترس اور عوجی متشاکل ماترس کے مجموعہ کے طور پر دکھایا جا سکتا ہے۔

مثال 22 ماترس $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ کو متشاکل اور عوجی متشاکل ماترس کے مجموعہ سے کے طور پر دکھائیے۔

حل یہاں

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

آیئے

$$P = \frac{1}{2}(B + B') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

اب

$$P' = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} = P$$

اس طرح

$$P = \frac{1}{2}(B + B')$$

ساتھ ہی مان لیجیے

$$Q = \frac{1}{2}(B - B') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

تب

$$Q' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{3} \\ \frac{-1}{2} & 0 & -3 \\ \frac{-5}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} = -Q$$

اس طرح $Q = \frac{1}{2}(B - B')$ اسکیو متشاکل ماترس

اب

$$P + Q = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = B$$

اس طرح B ایک متشاکل اور عوجی متشاکل ماترس کے مجموعہ کے طور پر دکھائی گئی ہے۔

مشق 3.3

1۔ ذیل میں ہر ایک ماترس کا پلٹاؤ معلوم کیجیے۔

(i) $\begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ \sqrt{3} & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

2۔ اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ہے تب تصدیق کیجیے کہ

(i) $(A+B)' = A' + B'$ (ii) $(A-B)' = A' - B'$

3۔ اگر $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ہے، تب تصدیق کیجیے کہ

(i) $(A + B)' = A' + B'$ (ii) $(A - B)' = A' - B'$

4۔ اگر $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ تب، $(A + 2B)$ معلوم کیجیے۔

5۔ ماترس A اور B کے لیے، دکھائیے کہ $(AB)' = B'A'$, جہاں

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

6۔ (i) اگر $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ تب دکھائیے کہ $A'A = I$

(ii) اگر $A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$ تب دکھائیے کہ $A'A = I$

7۔ (i) دکھائیے کہ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ماترس ایک متشاکل ماترس ہے۔

(ii) دکھائیے کہ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ماترس ایک عوجی متشاکل ماترس ہے۔

8۔ ماترس $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ کے لئے، جانچ کیجیے کہ

(i) $(A + A')$ ایک متشاکل ماترس ہے۔

(ii) $(A - A')$ ایک عوجی متشاکل ماترس ہے۔

9۔ $\frac{1}{2}(A + A')$ اور $\frac{1}{2}(A - A')$ کو معلوم کیجیے، جب کہ $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$

10۔ ذیل ماترس کو متشاکل اور عوجی متشاکل ماترس کے مجموعہ کے طور پر دکھائیے

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

مشق 11 سے 12 تک میں صحیح جواب کو چنیے۔

11۔ اگر A,B یکساں ترتیب والے ماترس ہیں، تب AB − BA ایک

(A) عوجی متشاکل ماترس ہے (B) متشاکل ماترس ہے۔

(C) صفر ماترس ہے (D) اکائی ماترس ہے۔

12۔ اگر $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$، تب $A + A' = I$ اگر α کی قدر ہے۔

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$

(C) π (D) $\frac{3\pi}{2}$

3.7 ایک ماترس کے ابتدائی عمل (استحالہ)

Elementary Operation (Transformation) of a matrix

ایک ماترس پر 6 عاملی (تحویل میں) جس میں سے 3 قطاروں کی وجہ سے ہیں اور تین 3 کالم کی وجہ سے ہیں، جو بنیادی عمل یا استحالہ کہلاتے ہیں۔

(i) کنہیں دو قطاروں یا کالموں کا آپس میں بدلاؤ۔ علامتی طور پر i^{th} اور j^{th} قطاروں کا آپس میں بدلاؤ $R_i \leftrightarrow R_j$ سے دکھایا جاتا ہے اور i^{th} اور j^{th} کالم کا آپسی بدلاؤ $C_i \leftrightarrow C_j$ سے دکھایا جاسکتا ہے۔

مثال کے طور پر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ پر $R_1 \leftrightarrow R_2$ عمل میں لانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

(ii) کسی بھی قطار یا کالم کے عناصر کی ضرب ایک غیر صفر عدد سے۔ علامتی طور پر i^{th} قطار کے ہر عنصر کو k سے ضرب کرنے پر جہاں $k \neq 0$ کو $R_i \leftrightarrow kR_i$ سے دکھایا جاتا ہے۔

اس کے مطابق کالم کے عمل $C_i \to kC_i$ سے دکھایا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر $C_3 \to \frac{1}{7}C_3$ کو عمل میں لانے پر $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ کو ،ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{7} \\ -1 & \sqrt{3} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

(iii) کسی بھی قطار یا کالم کے عناصر میں جمع ،اس کے مطابق کوئی بھی دوسری قطار کے عناصر میں جو کہ ایک غیر صفر عدد سے ضرب کیا جائے ۔علامتی طور پر i^{th} قطار کے عنصر میں جوڑ اس کے مطابق j^{th} قطار کے عناصر کی k سے ضرب $R_i \to R_i + kR_j$ سے ظاہر کی جاتی ہے۔

اس کے مطابق کالم کا عمل $C_i \to C_i + kC_j$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر $R_2 \to R_2 - 2R_1$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ ۔

3.8 قابلِ تعکیس ماترس

تعریف 6 اگر A ایک m رتبہ کی مربع ماترس ہے، اور اگر ایک دوسری مربع ماترس ہے، B یکساں ترتیب کی وجود میں آتی ہے ،تا کہ $AB = BA = I$ ہے، تب B ماترس A کا تقلیب کہلاتا ہے اور اسے A^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اس حالت میں A کو تقلیبی کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر، مان لیجیے $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ دو ماترس ہیں۔

اب
$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4-3 & -6+6 \\ 2-2 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

ساتھ ہی $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ اس طرح B، A کا معکوس ہے۔دوسرے الفاظ میں

اور A، B کا معکوس ہے۔یعنی $A = B^{-1}$ ۔

نوٹ

1۔ ایک مستطیل ماترس معکوس ماترس نہیں ہوتی، کیونکہ BA اور AB کا حاصل ضرب معرف ہو اور برابر ہو، یہ ضروری ہے کہ ماترس A اور B یکساں رتبہ کی مربع ماترس ہوں۔

2۔ اگر B، A کا معکوس ہے، تب A، B کا بھی معکوس ہے۔

مسئلہ 3 معکوس کو منفردیت (Uniqueness of inverse)

ثبوت مان لیجئے $A = [a_{ij}]$ ایک ترتیب m کی مربع ماترس ہے۔ اگر ممکن ہے، مان لیجئے B اور C، A کے دو معکوس ہیں۔ ہم دکھائیں گے ہیں کہ $B = C$

کیونکہ B، A کا معکوس ہے۔

$$AB = BA = I \quad \text{(i)...}$$

کیونکہ C، A کا معکوس ہے۔

$$AC = CA = I \quad \text{(2)...}$$

اس طرح $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$

مسئلہ 4 اگر A اور B یکساں رتبہ والی تقلیبی ماترس ہیں، تب $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ہے۔

ثبوت ایک ماترس کے معکوس کی تعریف سے، ہمارے پاس ہے۔

$$(AB)(AB)^{-1} = 1$$

یا $A^{-1}(AB)(AB)^{-1} = A^{-1}I$ (دو طرف کو پہلے A^{-1} سے ضرب کرنے پر)

یا $(A^{-1}A)B(AB)^{-1} = A^{-1}$ (کیونکہ $A^{-1}I = A^{-1}$)

یا $IB(AB)^{-1} = A^{-1}$

یا $B(AB)^{-1} = A^{-1}$

یا $B^{-1}B(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

یا $I(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

اس طرح $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3.8.1 ایک ماترس کا معکوس ابتدائی عمل کے ذریعے

مان لیجیے X، A اور B یکساں رتبہ والی ماترس ہیں۔ ماترس مساوات X=AB پر ایک قطار عمل کے ایک سلسلہ کو لاگو کرنے کے لیے، ہم یہ قطار عمل پر AB کے حاصل ضرب میں پہلی ماترس A کے RHS پر ایک کے بعد ایک پر لاگو کریں گے۔

اسی طرح، ماترس مساوات X = AB پر کالم عمل کے ایک سلسلہ کو لاگو کرنے کے لیے ہم یہ کالم عمل دوسری ماترس B پر AB کے حاصل ضرب کی RHS پر ایک کے بعد ایک لاگو کریں گے۔

اوپر کے بحث ومباحثہ کو مدنظر رکھتے ہوئے ہم اس نتیجہ پر پہنچے ہیں کہ اگر A ایک ماترس ہے تا کہ A^{-1} وجود میں آئے، تب A^{-1} کو دریافت کرنے کے لیے ابتدائی قطار عمل استعمال کرکے $A = IA$ لکھئے اور $A = IA$ پر قطار عمل کے سلسلہ کو لاگو کیجیے جب تک ہمیں $I = BA$ نہ حاصل ہوجائے۔ ماترس B، A کا معکوس ہوگا۔ اسی طرح، اگر ہماری یہ خواہش ہے کہ ہم کالم عمل کا استعمال کرکے A^{-1} دریافت کریں، تب ہم لکھتے ہیں اور $A = AI$ پر ایک سلسلہ کو لاگو کریں جب تک ہمیں $I = AB$ نہ حاصل ہوجائے۔

ریمارک اس حالت میں، ایک یا زیادہ ابتدائی قطار (کالم) کا عمل $A = IA$ $(A = IA)$ پر لاگو کرنے پر اگر ہمیں تمام صفر حاصل ہوتے ہیں ماترس A کے L.H.S پر ایک زیادہ قطاروں میں، تب A^{-1} وجود میں نہیں آتا۔

مثال 23 ابتدائی عمل کا استعمال کرکے، ماترس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ کا معکوس معلوم کیجیے۔

حل مبادیاتی قطار عمل کا استعمال ترتیب میں کرنے پر ہم لکھ سکتے ہیں $A = IA$

یا $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$ تب $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A$ ($R_2 \to R_2 - 2R_1$ کو لاگو کرنے پر)

یا $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} A$ ($R_2 \to -\frac{1}{5} R_2$ کو لاگو کرنے پر)

یا $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} A$ ($R_1 \to R_1 - 2R_2$ کو لاگو کرنے پر)

اس طرح
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

اس کے متبادل (Alternatively)، ابتدائی کالم عمل کا استعمال کرنے میں ہم لکھتے ہیں $A = AI$ یعنی

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لاگو کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اب $C_2 \to -\frac{1}{5} C_2$ کا استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

آخر میں $C_1 \to C_1 - 2C_2$ کا استعمال کرنے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

اس طرح
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

مثال 24 ابتدائی عمل کا استعمال کر کے ذیل ماترس کا معکوس معلوم کیجیے
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

حل لکھنے کے لئے $A = IA$ یعنی

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

($R_1 \leftrightarrow R_2$ کو لاگو کرنے پر) یا

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$R_3 \to R_3 - 3R_1$ کو لاگو کرنے پر یا

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} A$$

($R_1 \to R_1 - 2R_2$ کو لاگو کرنے پر) یا

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} A$$

($R_3 \to R_3 + 5R_2$ کو لاگو کرنے پر) یا

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} A$$

($R_3 \to \frac{1}{2}R_3$ کو لاگو کرنے پر) یا

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} A$$

($R_1 \to R_1 + R_3$ کو لاگو کرنے پر) یا

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} A$$

($R_2 \to R_2 + 2R_3$ کو لاگو کرنے پر) یا

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} A$$

اس طرح

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

متبادل کے طور پر، $A = AI$ لکھتے ہیں یعنی

$$\begin{bmatrix}0&1&2\\1&2&3\\3&1&1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

یا $$\begin{bmatrix}1&0&2\\2&1&3\\1&3&1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} \qquad (C_1 \leftrightarrow C_2)$$

یا $$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\1&3&-1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&-2\\0&0&1\end{bmatrix} \qquad (C_3 \to C_3 - 2C_1)$$

یا $$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&3&2\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&-2\\0&0&1\end{bmatrix} \qquad (C_3 \to C_3 + C_2)$$

یا $$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&3&1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}0&1&\frac{1}{2}\\1&0&-1\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix} \qquad (C_3 \to \frac{1}{2}C_3)$$

یا $$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-5&3&1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}-2&1&\frac{1}{2}\\1&0&-1\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix} \qquad (C_1 \to C_1 - 2C_2)$$

یا $$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\-4&0&-1\\\frac{5}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix} \qquad (C_1 \to C_1 + 5C_3)$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}\\-4&3&-1\\\frac{5}{2}&\frac{-3}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix} \qquad (C_2 \to C_2 + 3C_3)$$

اس طرح
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

مثال 25 P^{-1} دریافت کیجیے اگر یہ وجود میں ہے، $P = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ دیا ہوا ہے۔

حل ہمارے پاس ہے $P = IP$ یعنی $\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P$

یا $\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P$ ($R_1 \to \frac{1}{10} R_1$ کو لاگو کرنے پر)

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} P \; (R_2 \to R_2 + 5R_1)$$

ہمارے پاس اوپر دی ہوئی مساوات کے ماترس کے بائیں ہاتھ کی طرف دوسری قطار میں تمام صفر ہیں اس لیے وجود میں نہیں ہے۔

مشق 3.4

ابتدائی استحالہ کا استعمال کر کے مشق 1 تا 7 ماترس کے معکوس معلوم کیجیے، اگر موجود ہیں۔

1. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

.18 میٹرکس A اور B ایک دوسرے کی معکوس ہوں گی اگر صرف

(A) $AB = BA$ (B) $AB = BA = 0$

(C) $AB = 0, BA = I$ (D) $AB = BA = I$

مثال 26 اگر $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ہوتو ثابت کیجیے کہ $n \in N$, $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

حل ہم اس نتیجہ کو ریاضی کے امالہ کا اصول استعمال کرکے ثابت کریں گے۔

ہمارے پاس ہے۔ $P(n)$ اگر $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$، تب $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix} n \in N$

$$P(1):\ A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \text{ تاکہ } A^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

اس لیے $n = 1$ کے لیے نتیجہ واضح ہے۔

مان لیجیے نتیجہ $n = k$ کے لیے صحیح ہے تاکہ

$$P(k):\ A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ تب } A^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$$

اب، ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ نتیجہ $n = k + 1$ کے لیے صحیح ہے۔

اب
$$A^{k+1} = A \cdot A^k = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos k\theta - \sin\theta\sin k\theta & \cos\theta\sin k\theta + \sin\theta\cos k\theta \\ -\sin\theta\cos k\theta + \cos\theta\sin k\theta & -\sin\theta\sin k\theta + \cos\theta\cos k\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta + k\theta) & \sin(\theta + k\theta) \\ -\sin(\theta + k\theta) & \cos(\theta + k\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$$

اس لیے، نتیجہ $n = k + 1$ کے لیے صحیح ہے۔ اس طرح ریاضی کے عمالہ کے اصول سے

ہمارے پاس ہے $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$ سبھی طبعی اعداد کے لیے صحیح ہے۔

مثال 27 اگر A اور B یکساں ترتیب والی متشاکل ماترس ہیں، تب دکھایئے AB متشاکل ہے اگر اور صرف اگر A اور B تقلیبی ہیں۔ اس کا مطلب $AB = BA$

حل کیونکہ A اور B دونوں متشاکل ماترس ہیں، اس لیے $A' = A$ اور $B' = B$

مان لیجیے AB ایک متشاکل ہے، تب $(AB)' = AB$

لیکن $(AB)' = B'A' = BA$ (کیوں؟)

اس لیے $BA = AB$

اس کے برعکس، اگر $AB = BA$ ہے تب ہم دکھا سکتے ہیں کہ AB متشاکل ہے۔

اب $(AB)' = B'A'$

$= BA$ (کیونکہ A اور B متشاکل ہے)

اس لیے AB متشاکل ہے۔

مثال 28 مان لیجیے $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ ایک ماترس ہے D معلوم کیجیے تا کہ $CD - AB = 0$

حل کیونکہ A,B,C سب ہی ترتیب 2 کی مربع ماترس ہیں، اور $CD - AB$ کو بخوبی بیان کیا گیا ہے، D ترتیب 2 کی مربع ماترس ہونی چاہیے۔

مان لیجیے $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تب $CD - AB = 0$ دیتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = 0$$

یا
$$\begin{bmatrix} 2a+5c & 2b+5d \\ 3a+8c & 3b+8d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 43 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a+5c-3 & 2b+5d \\ 3a+8c-43 & 3b+8d-22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ یا

ماترس کی برابری سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2a + 5c - 3 = 0 \qquad \text{....(1)}$$

$$3a + 8c - 43 = 0 \qquad \text{...(2)}$$

$$2b + 5d = 0 \qquad \text{...(3)}$$

$$3b + 8d - 22 = 0 \qquad \text{...(4)}$$

(1)اور (2) کوحل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $a = -191$، $c = 77$، (3)اور (4) کوحل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$b=-110$, $d=44$

اس لیے $$D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -191 & -110 \\ 77 & 44 \end{bmatrix}$$

باب 3 پر مبنی متفرق مشقیں

1۔ مان لیجیے $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ دکھائیے کہ $(aI + bA)^n = a^n I + na^{n-1}\, bA$ جہاں I تماثلہ ماترس ہے ترتیب 2 کی اور $n \in N$

2۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ہے تو ثابت کیجیے کہ $A^n = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}$, $n \in N$. جہاں n ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

3۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ہے تو ثابت کیجیے $A^n = \begin{bmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$ جہاں n ایک مثبت عدد ہے۔

4۔ اگر A اور B متشاکل ماترس ہیں، تو ثابت کیجیے کہ $AB - BA$ ایک عوجی متشاکل ماترس ہے۔

5۔ دکھائیے کہ ماترس B'AB متشاکل ماترس ہے یا عوجی متشاکل ماترس ہے جس طرح A متشاکل یا عوجی متشاکل ہے۔

6۔ $x, y, z,$ کی قدریں معلوم کیجیے اگر ماترس $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ مساوات A'A=1

7۔ x کی کن قدروں کے لیے $[1 \quad 2 \quad 1]\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 0 & 1\\1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\x\end{bmatrix} = \mathrm{o}?$ ہے

8۔ اگر $A = \begin{bmatrix}3 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}$ ہے تو دکھائیے کہ $A^2 - 5A + 7I = 0$ ہے۔

9۔ x معلوم کیجیے، اگر $[x \quad -5 \quad -1]\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 2 & 1\\2 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\4\\1\end{bmatrix} = O$ ہے۔

10۔ ایک صنعت کار تین طرح کی اشیاء x, y, z تیار کرتا ہے، جنہیں وہ دو بازاروں میں فروخت کرتا ہے۔ سالانہ فروخت ذیل میں دکھائی گئی ہے۔

بازار	اشیاء		
I	10,000	2,000	18,000
II	6,000	20,000	8,000

(a) اگر x, y اور z کی ایک اکائی کی قیمت فروخت بالترتیب 2.50 روپیہ، 1.50 روپیہ اور 1.00 روپیہ ہے، ماترس الجبرا کی مدد سے ہر بازار میں کل رقم معلوم کیجیے۔

(b) اگر اوپر دی ہوئی تینوں اشیاء کی ہر اکائی کی قیمت بالترتیب 2.00 روپے، 1.00 روپیہ اور 50 پیسے ہے لگ بھگ منافع معلوم کیجیے۔

11۔ ماترس X معلوم کیجیے تاکہ $X\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7 & -8 & -9\\2 & 4 & 6\end{bmatrix}$

12۔ اگر A اور B یکساں ترتیب کی مربع ماترس ہیں اس طرح کہ $AB = BA$، تب امالہ کے اصول سے ثابت کیجیے کہ $AB^n = B^nA$ اس کے آگے ثابت کیجیے کہ $(AB)^n = A^nB^n$ تمام $n \in N$

ذیل سوالوں کے صحیح جواب کو چنیے

13۔ اگر $A = \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\\gamma & -\alpha\end{bmatrix}$ ایسا ہے تاکہ $A^2 = I$، تب

(A) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (B) $1 - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$

(C) $1-\alpha^2-\beta\gamma=0$ (D) $1+\alpha^2-\beta\gamma=0$

14۔ اگر ماترس A دونوں متشاکل اور عوجی متشاکل ہے، تب

(A) A ایک تری ماترس ہے (B) A ایک صفر ماترس ہے

(C) A ایک مربع ماترس ہے (D) ان میں سے کوئی بھی نہیں

15۔ اگر A ایک مربع ماترس ہے تاکہ $A^2 = A$، تب $(I+A)^3-7A$ برابر ہے۔

(A) A (B) I – A (C) I (D) 3A

خلاصہ

- ایک ماترس اعداد یا تفاعل کا ایک مرتب مستطیلی ترتیب ہے۔
- ایک ماترس جس میں m قطاریں اور n کالم ہیں، $m \times n$ رتبہ کی ماترس کہلاتی ہے۔
- $[a_{ij}]_{m\times 1}$ ایک کالم ماترس ہے۔
- $[a_{ij}]_{1\times n}$ ایک قطار ماترس ہے۔
- ایک $m \times n$ ماترس ایک مربع ماترس ہے اگر $m = n$ ہو۔
- $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ ایک وتری ماترس ہے اگر $a_{ij}=0$، جب $i \neq j$
- $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ایک عددیہ ماترس ہے اگر $a_{ij}=0$، جب کہ $i\neq j$، $a_{ij}=k$ (k کوئی مشعل ہے) جب کہ $i=j$
- $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ایک اکائی ماترس ہے، اگر $a_{ij}=1$، جب کہ $i=j$، $a_{ij}=0$، جب $i\neq j$
- ایک صفر ماترس میں تمام عناصر صفر ہوتے ہیں۔
- $A=[a_{ij}]=[b_{ij}]=B$ اگر (i) A اور B یکساں ترتیب کے ہیں، (ii) $a_{ij}=b_{ij}$ تمام i اور j کی ممکن قدروں کے لئے
- $kA = k[a_{ij}]_{m\times n} = [k(a_{ij})]_{m\times n}$
- $-A=(-1)A$
- $A-B=A+(-1)B$

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ جہاں A,B اور C یکساں ترتیب کے ہیں۔
- $k(A + B) = kA + kB$، جہاں A اور B یکساں ترتیب کے ہیں، k ایک مستقل ہے۔
- $(k + l)A = kA + lA$، جہاں k اور l مستقل ہیں۔
- اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ اور $B = [b_{jk}]_{n\times p}$ ہیں، تب $AB = C = [c_{ik}]_{m\times p}$ جہاں $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$
- (i) $A(BC) = (AB)C$ (ii) $A(B + C) = AB + AC$ (iii) $(A + B)C = AC + BC$
- اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ تب A' یا $A^{T} = [a_{ji}]_{n\times m}$
- (i) $(A')' = A$ (ii) $(kA)' = kA'$ (iii) $(A + B)' = A' + B'$ (iv) $(AB)' = B'A'$
- A ایک متشاکل ماترس ہے اگر $A' = A$
- A ایک عوجی متشاکل ماترس ہے اگر $A' = -A$
- کوئی بھی مربع ماترس کو متشاکل ماترس اور عوجی متشاکل ماترس کے مجموعہ کے طور پر دکھایا جاسکتا ہے۔
- مبادیاتی عمل ایک ماترس کے اس طرح سے ہیں۔

  (i) $R_i \leftrightarrow R_j$ یا $C_i \leftrightarrow C_j$

  (ii) $R_i \to kR_i$ یا $C_i \to kC_i$

  (iii) $R_i \to R_i + kR_j$ یا $C_i \to C_i + kC_j$
- اگر A اور B دو مربع ماترس ہیں تاکہ $AB = BA = I$، تب B ماترس A کا معکوس ہے اور اسے A^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے اور B، A کا معکوس ہے۔
- اگر ایک مربع ماترس کا معکوس ہوتا ہے، تو یہ منفرد ہوتا ہے۔