باب 2

5259CH02

معکوس ٹرگنومیٹریائی تفاعلات
(INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS)

❖'ریاضی عموماً بنیادی طور پر خود دکھائی دینے والی اشیاء کی سائنس ہے۔ فیلکس کلین❖

2.1 تعارف


آریہ بھٹہ
(476-550A.D.)

باب '1' میں، ہم پڑھ چکے ہیں کہ فنکشن f کا معکوس جو کہ f^{-1}, سے، ظاہر کیا جاتا ہے، وجود پزیر ہوتا ہے اگر f یک۔یک اور اون ٹو (onto) ہے۔ کچھ ایسے تفاعلات ہیں جو یک۔یک نہیں ہیں، پر یا پھر دونوں خصوصیات نہیں ہیں اس لیے ہم ان کے معکوس کے بارے میں بات نہیں کرتے۔ گیارویں جماعت میں ہم پڑھ چکے ہیں کہ ٹرگنومیٹریائی تفاعلات یک۔یک اور اون ٹو نہیں ہیں۔ اپنے طبعی علاقہ اور وسعت میں اور اس لیے ان کے معکوس وجود پزیر نہیں ہیں۔ اس باب میں ہم ٹرگنومیٹریائی تفاعلات کے علاقوں اور وسعت کی بندشوں کے بارے میں مطالعہ کریں گے جو ان کے معکوس کے وجود میں ہونے کی یقین دہانی کرتے ہیں اور ان کے کردار کا مشاہدہ گراف کے ذریعے ہوتا ہے۔

معکوس ٹرگنومیٹریائی تفاعلات احصا (Calculus) میں ایک اہم رول ادا کرتے ہیں جس کے لیے وہ بہت سے تکملہ (Integrals) کی تعریف بیان کرتے ہیں۔

2.2 بنیادی تصور

گیارہویں جماعت میں ہم نے ٹرگنومیٹریائی تفاعلات کا مطالعہ کیا ہے۔ جنہیں ذیل طریقے سے بیان کیا گیا ہے۔

سائن تفاعل (فنکشن) sine : $\mathbf{R} \to [-1, 1]$

کوسائن فنکشن — $\cos : \mathbf{R} \to [-1, 1]$ i.e

ٹینجنٹ فنکشن i. e., $\tan: \mathbf{R} - \{x : x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in\} \to \mathbf{R}$

کوٹ فنکشن i.e. $\text{Cot}: \mathbf{R} - \{x : x = n\pi, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$

سیکینٹ فنکشن i.e., $\text{Sec}: \mathbf{R} - \{x : x = (2n+)1\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R} - (-1,1)$

کوسیکینٹ فنکشن i.e. $\text{cosec}: \mathbf{R} - \{x : x = (2n\pi, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R} - (1-1,1)$

ہم نے باب '1' میں بھی پڑھا ہے کہ اگر $f : \mathrm{X} \to Y$ تا کہ $f(x) = y$ یک یک 'اون ٹو' ہے تب ہم ایک یکتا تفاعل $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ کو بیان کر سکتے ہیں تا کہ $g(y) = x$ ، جہاں $x \in \mathrm{X}$ اور $y \in f(x)$ یہاں، g کا علاقہ $=f$ کی وسعت اور g کی وسعت $= f$ کا علاقہ ۔تفاعل g کو f کا معکوس کہا جاتا ہے اور f^{-1} ظاہر کیا جاتا ہے۔اس کے علاوہ g یک ۔ یک اور اون ٹو بھی ہے۔اور g کا معکوس f ہے۔اس طرح $g^{-1}(f^{-1})^{-1} = f$ ہمارے پاس اور بھی ہے۔

$$(f^{-1}of)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

$$(f\,o\,f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

کیونکہ سائن فنکشن کا علاقہ تمام حقیقی اعداد کا سیٹ ہے اور وسعت بند وقفہ $[-1,1]$ ہے۔

اگر ہم اس کے علاقہ کو $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ تک محدود رکھیں، تب یہ یک یک اور اون ٹو ہو جاتا ہے جس کی وسعت $[-1,1]$ ہے۔

اصلیت میں، سائن فنکشن کسی بھی وقفہ $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ وغیرہ یک ۔ یک تک محدود ہے۔

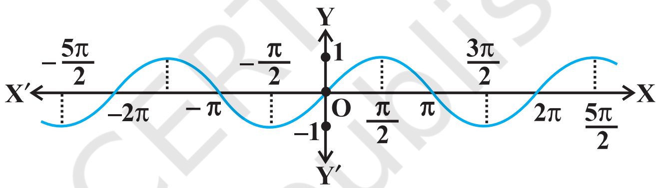
اور اس کی وسعت $[-1,1]$ ہے۔اور وسعت کوئی بھی قفہ $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right], \left[\frac{3-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$ یا $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ شاخ حاصل ہوتی ہے۔ وہ شاخ جس کی وسعت $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$ ہے۔اصل قیمت شاخ کہلاتی ہے، جب کہ دوسرے وقفے سمت کی طرح $\sin^{-1}$ کی مختلف شاخیں دیتی ہے۔ جب ہم فنکشن $\sin^{-1}$ کا حوالہ دیتے ہیں، ہم اسے ایک تفاعل کے طور پر لیتے ہیں جس کا حلقہ $[-1,1]$ ہے اور سمت $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$ ہے۔

ہم $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ لکھتے ہیں۔

معکوس فنکشن کی تعریف سے یہ نکلتا ہے کہ اگر $-1 \le x \le 1$ تو $\sin(\sin x) = x \text{ if } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ دوسرے الفاظ میں، اگر $y = \sin^{-1} x$ تب $\sin y = x$ ۔

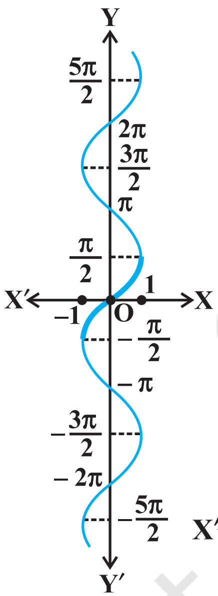
ریمارک

(i) ہم باب '1' سے جانتے ہیں کہ، اگر $y = f(x)$ ایک قابلِ تعکیس فنکشن ہے، تب $x = f^{-1}(y)$ ہے۔ اس لئے $\sin^{-1}$ فنکشن کا گراف اصلی فنکشن سے x اور y محور کو پلٹ کر حاصل کیا جاسکتا ہے، i.e.، اگر (a,b) سائن فنکشن کے گراف پر ایک نقطہ ہے، تب (b,a) سائن فکشن کے گراف کے معکوس کے مطابق نقطہ بن جاتا ہے۔ اس طرح $y = \sin^{-1} x$ کا گراف $y = \sin^{-1} x$ کے گراف x اور y محور کو آپس میں بدلنے سے حاصل ہوسکتا ہے۔



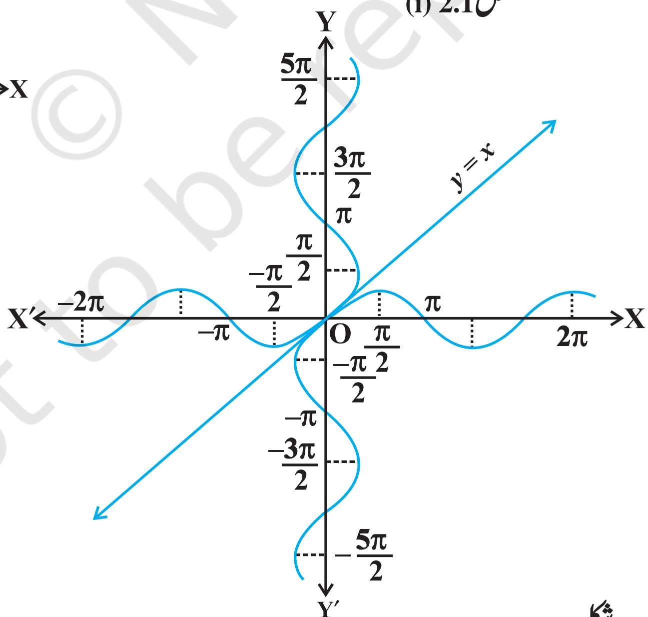
$y = \sin x$

شکل 2.1 (i)



$y = \sin^{-1} x$

شکل 2.1 (ii)



$y = \sin x$ and $y = \sin^{-1} x$ **شکل 2.1 (iii)**

$y = \sin^{-1} x$ کے گراف شکل 2.1 (i)، (ii) اور (iii) کی طرح دیئے گئے ہیں۔ $y = \sin^{-1} x$ کا گراف کا گہرا حصہ شاخ کی اصل قیمت (principal value branch) کو دکھاتا ہے۔

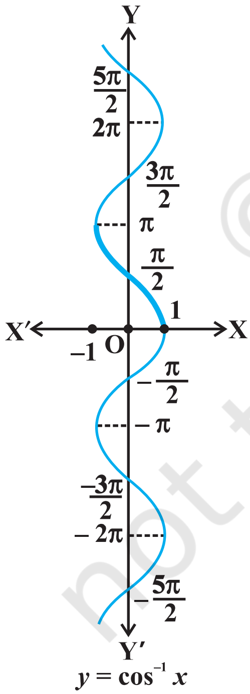
(ii) یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ معکوس فنکشن کا گراف اصل فنکشن کے گراف کے مطابق حاصل کیا جا سکتا ہے۔ ایک شیشے کی طرح (یعنی انعکاس) خط $x = x$ کے ساتھ اسے گراف $y = \sin x$ کے ساتھ $y = \sin^{-1} x$ پر غور کر کے دیکھا جا سکتا ہے۔ جس طرح اسی محور میں دیا گیا ہے۔ (شکل 2.1 (iii))

سائن فنکشن کی طرح کوسائن فنکشن وہ فنکشن ہے جس کا علاقہ تمام حقیقی اعداد کا سیٹ ہے اور وسعت $[-1,1]$ سیٹ ہے اگر ہم کوسائن فنکشن کے علاوہ پر $[0,\pi]$ تک بندش لگائیں، تب یہ سمت $[-1,1]$ کے ساتھ یک۔ یک اور اون ٹو (onto) ہو جاتا ہے۔ دراصل میں، کوسائن فنکشن کسی بھی وقفہ $[-\pi,0],[\pi,2\pi]$ تک بندش میں رہتا ہے، ایک دو قسمی ہے۔ جس کی وسعت $[-1,1]$ ہے۔ اس لیے ہم کوسائن فنکشن کے معکوس کو ان میں سے کسی بھی وقفہ پر بیان کر سکتے ہیں۔ ہم کوسائن فنکشن کے معکوس کو $\cos^{-1}$ (جس کو سائین فنکشن) سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس طرح $\cos^{-1}$ ایک فنکشن ہے جس کا علاقہ $[-1,1]$ ہے اور وسعت کوئی بھی وقفہ $[-\pi,0],[0,\pi],[\pi,2\pi]$ وغیرہ ہو سکتا ہے۔ ہر ایک وقفہ کے مطابق ہمیں $\cos^{-1}$ تفاعل کی شاخ حاصل ہوتی ہے۔ وہ شاخ جس کی وسعت $[0,\pi]$ ہے $\cos^{-1}$ تفاعل کی اصل قیمت شاخ کہلاتی ہے۔ ہم لکھتے ہیں۔

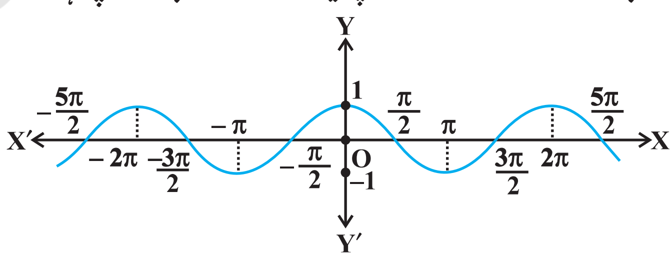
$$\cos^{-1}[-1,1] \to [0,\pi]$$

$y = \cos^{-1} x$ کا گراف بھی $y = \sin^{-1} x$ کے گراف کی طرح کھینچا جا سکتا ہے جس طرح اوپر بحث و مباحثہ کیا گیا ہے۔ $y = \cos x$ اور $y = \cos^{-1} x$ کے گراف شکل 2.2 (i) اور (ii) میں دیئے گئے ہیں۔

اب ہمیں $\cos^{-1} x$ اور $\sec^{-1} x$ پر ذیل کی طرح بحث و مباحثہ کرنا چاہئے۔



شکل 2.2 (ii)

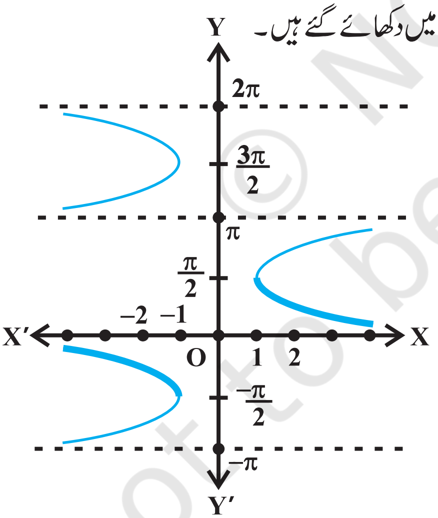


شکل 2.2 (ii)

کیونکہ $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$ ، cosec فنکشن کا حلقہ $\{x : x \in \mathbf{R}, x \neq n\pi \in \mathbf{Z}\}$ کا سیٹ ہے اوروسعت $\{y : y \in R, y \geq 1 \, or \, y \leq -1\}$ کا سیٹ ہے یعنی سیٹ $\mathbf{R} - (-1,1)$ ہے۔اس کا مطلب ہے کہ $y = \operatorname{cosec} x$ تمام حقیقی قدریں $-1 < y > 1$ کے اختیار کرتا ہے اور جو π کے تکملہ ضریب کے لیے بیان نہیں کیا جاسکتا۔اگر ہم cosec فنکشن کے علاقہ $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ پر بندش لگادیں تب یہ اپنی وسعت جیسا کہ سیٹ $\mathbf{R} - (-1,1)$ کے ساتھ یک۔یک اور اون ٹو ہے۔اصلیت میں Cosec فنکشن کسی بھی وقفہ $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}, \left[\dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{-\pi}{2}\right] - \{-\pi\}, \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\}$ وغیرہ تک کے لیے محدود ہے۔دو ربطی ہے اور اس کی وسعت تمام حقیقی اعداد $\mathbf{R} - (-1,1)$ کا سیٹ ہے۔اس طرح $\operatorname{cosec}^{-1}$ کو ایک فنکشن کی طرح بیان کیا جاسکتا ہے۔ جس کا علاقہ $\mathbf{R} - (1-,1)$ ہے اور وسعت کوئی بھی وقفہ $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}, \left[\dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{-\pi}{2}\right] - \{-\pi\}, \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\}$ قدر کی شاخ کہلاتا ہے۔اس طرح ہمارے پاس اصل شاخ اس طرح ہے۔

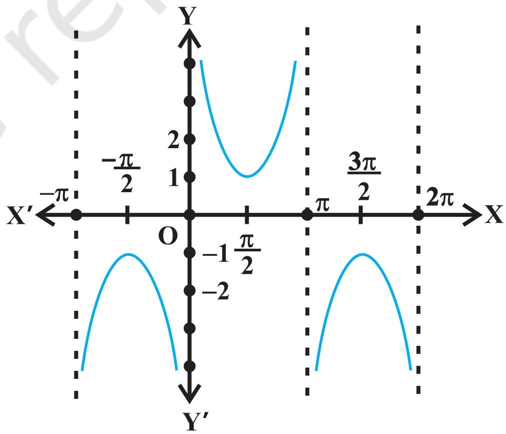
$$\operatorname{cosec}^{-1} : \mathbf{R} - (-1,1) \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$$

$y = \operatorname{cosec} x$ اور $y = \operatorname{cosec}^{-1} x$ کے گراف شکل 2.3(i) میں دکھائے گئے ہیں۔



$y = \operatorname{cosec}^{-1} x$

شکل 2.3 (ii)



$y = \operatorname{cosec} x$

شکل 2.3 (i)

ساتھ ہی کیوں کہ $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ ، $y = \sec x$ کا علاقہ $\mathrm{R} - \{x : x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ ہے اور وسعت

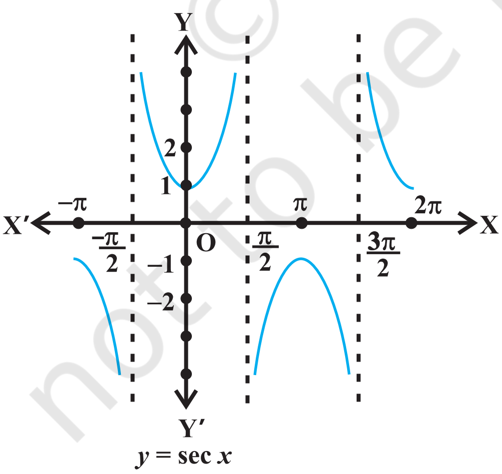
$R-(-1,1)$ ہے۔اس کا مطلب ہے Sec (سیکنٹ فنکشن) تمام حقیقی قدروں کا تصور کرتا ہے، $-1<y<1$ کی بجائے اور $\frac{\pi}{2}$ کے طاق ضریب نہیں کیا گیا ہے۔ اگر ہم سیکنٹ فنکشن کے حلقہ کو $[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ تک محدود کر دیں، تب یہ یک۔یک۔ اور پر ہے جس وسعت سیٹ $R-(-1,1)$ ہے۔ دراصل سیکینٹ فنکشن کسی بھی وقفہ $[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\},[-\pi,o]-\left\{\frac{-\pi}{2}\right\}$، $[0,2\pi]-\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$, وغیرہ تک کے لیے محدد ہے دو قسمی ہے اور اس کی وسعت $R-\{-1,1\}$ ہے۔ اس طرح Sec^{-1} کو ایک فنکشن کی طرح معرف کیا جا سکتا ہے جس کا حلقہ $R-(-1,1)$ اور کوئی بھی وقفہ $[0\pi]-\left[\frac{\pi}{2}\right],[-\pi,0]-\left\{\frac{-\pi}{2}\right\}$، $[\pi,2\pi]-\left[\frac{3\pi}{2}\right]$, وغیرہ میں ہو سکتا ہے۔ ہر ایک وقفہ کے مطابق ہمیں Sec^{-1} فنکشن کی مختلف شاخیں ملتی ہیں۔ وہ شاخ جس کی وسعت $[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ہے Sec^{-1} فنکشن کی اصل قیمت کی شاخ کہلاتی ہے۔ اس طرح ہمارے پاس ہے۔

$$\sec^{-1}: \mathbf{R}-(-1,1) \rightarrow [0, p]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

فنکشن $y=\sec x$ اور $y=\sec^{-1}x$ کے گراف شکل 2.4, (i), (ii) میں دیے گئے ہیں۔

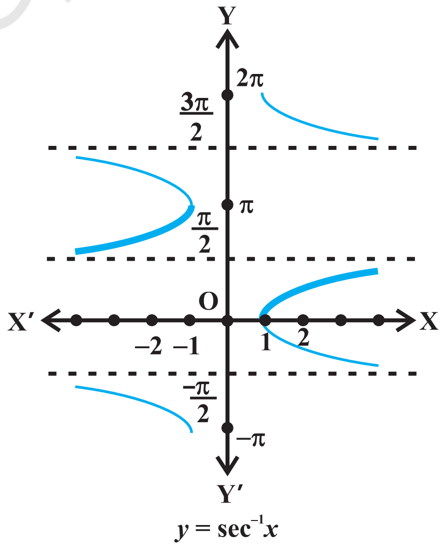
آخر میں ہم $\tan^{-1}$ اور $\cot^{-1}$ پر بحث و مباحثہ کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ tan فنکشن (ٹینجنٹ فنکشن) کا علاقہ $\{x : x \in \mathbf{R}$ اور $x \neq (2n+1), n \in \mathbf{Z}\}$ ہے۔ اور



$y = \sec x$

شکل 2.4 (i)



$y = \sec^{-1}x$

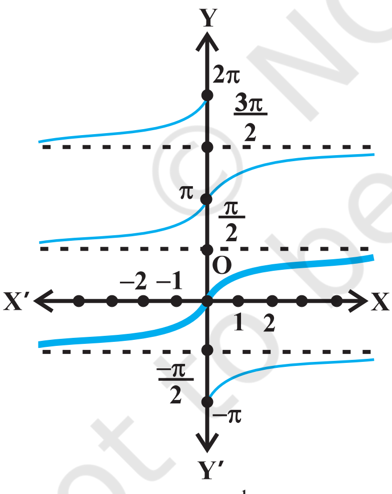
شکل 2.4 (i)

وسعت **R** ہے۔اس کا مطلب ہے کہ tan فنکشن $\frac{\pi}{2}$ کے طاق ضریب کے لیے معرف نہیں کیا گیا ہے اگر ہم tangent فنکشن کے علاقہ کو $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ تک محدود رکھیں، تب یہ یک یک اور پر ہے اپنی وسعت **R** کے ساتھ دراصل، ٹینجنٹ فنکشن کسی بھی وقفہ $\left(\frac{-3\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right),\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ وغیرہ تک بندش میں دو ربطی ہے اور اس کی وسعت **R** ہے۔اس طرح $\tan^{-1}$ جس کا حلقہ **R** ہے اور وسعت کوئی بھی وقفہ $\left(\frac{-3\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right),\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ اور اس کے آگے ہے ایک فنکشن کی طرح بیان کیا جا سکتا ہے۔ یہ وقفہ فنکشن $\tan^{-1}$ کی مختلف شاخیں دیتا ہے۔وہ شاخ جس کی وسعت $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ہے $\tan^{-1}$ فنکشن کی اصل قیمت کی شاخ کہلاتی ہے۔

اس طرح ہمارے پاس ہے

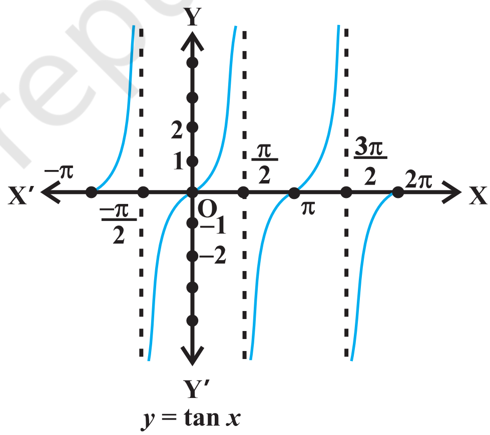
$$\tan^{-1}:\mathbf{R}\to\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

فنکشن $y=\tan x$ اور $y=\tan^{-1}x$ کے گراف شکل 2.5 (i), (ii) میں دیے گئے ہیں



$y = \tan^{-1}x$

شکل 2.5 (i)



$y = \tan x$

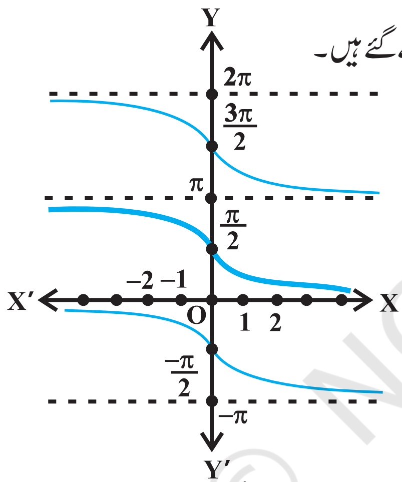
شکل 2.5 (i)

ہم جانتے ہیں کہ cot فنکشن (cotangent فنکشن) کا حلقہ سیٹ $\{x : x \in \mathbf{R}$ اور $x \neq n\pi,\ n \in Z\}$ ہے اور وسعت **R** ہے ۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ cotangent فنکشن π کے ضربی تکملہ کے لیے بیان نہیں کیا گیا ہے۔ اگر ہم

cotangent فنکشن کے علاقہ کو (o,π) تک محدود کریں، تب یہ دو رقسمی ہے اور اس کی وسعت **R** ہے۔ حقیقت میں، اگر cotangent فنکشن کسی بھی حلقہ $(-\pi,\ 0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,2\pi)$ وغیرہ کے لیے محدود ہے تو یہ دوقسمی ہے اور اس کی وسعت **R** ہے۔ اس طرح $\cot^{-1}$ ایک فنکشن کی طرح بیان کیا جا سکتا ہے جس کا حلقہ **R** ہے اور اس کی وسعت کوئی بھی وقفہ $(-\pi,\ 0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,2\pi)$ وغیرہ ہے۔ یہ وقفہ فنکشن $\cot^{-1}$ کی مختلف شاخیں دیتے ہیں۔ وہ فنکشن جس کی وسعت $(0,\pi)$ ہے $\cot^{-1}$ فنکشن کی بنیادی قدر شاخ کہلاتا ہے۔ اس طرح ہمارے پاس ہے

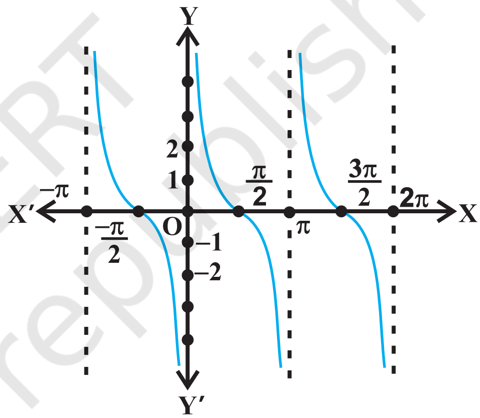
$$\cot^{-1}x : \mathbf{R} \to (0,\pi)$$

$y=\cot x$ اور $y = \cot^{-1}x$ کے گراف شکل 2.6 (i), (ii) میں دیے گئے ہیں۔



$y = \cot^{-1}x$

شکل 2.6 (i)



$y = \cot x$

شکل 2.6 (i)

ذیل جدول معکوس ٹرگنومیٹریائی فنکشن (بنیادی قدر شاخیں) حلقوں اور سمت کے ساتھ دیتی ہے۔

$\sin^{-1}$	:	$[-1, 1]$	$\to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}$	:	$[-1, 1]$	$\to [0,\pi]$
cosec^{-1}	:	$\mathbf{R}-(-1, 1)$	$\to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$

$\sec^{-1}$	:	$\mathbf{R}-(-1,1)$	$\to [0,\pi]-\{\frac{\pi}{2}\}$
$\tan^{-1}$	:	$\mathbf{R}$	$\to \left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
$\cot^{-1}$	:	$\mathbf{R}$	$\to (0,\pi)$

نوٹ

1۔ $\sin^{-1}x$ اور $\sin x^{-1}$ کے ساتھ نہیں جوڑا جاسکتا۔ دراصل $(\sin x)^{-1}=\dfrac{1}{\sin x}$ اور اسی طرح دوسرے ٹرگنومیٹریائی فنکشن کے لیے۔

2۔ جب بھی معکوس ٹرگنومیٹریائی فنکشن کی شاخ کوئی ذکر نہ ہو۔ ہمارا مطلب اس فنکشن کی بنیادی قدر کی شاخ سے ہے۔ ہوتا ہے

3۔ ایک معکوس ٹرگنومیٹریائی فنکشن کی قدر جو کہ بنیادی شاخ کی وسعت میں موجود ہے معکوس ٹرگنومیٹر یائی کی بنیادی قدر کہلاتا ہے۔

اب ہم ذیل مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 1 $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ کی اصل قیمت معلوم کیجیے۔

حل مان لیجیے $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=y$ تب $\sin y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ہم جانتے ہیں کہ $\sin^{-1}$ کی اصل قیمت شاخ کی سمت $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ ہے اور $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ۔

اس لیے $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ کی اصل قیمت $\dfrac{\pi}{2}$ ہے۔

مثال 2 $\cot^{-1}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ اصل قیمت معلوم کیجیے۔

حل مان لیجیے $\cot^{-1}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ تب۔

$$\cot y=\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\cot\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cot\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cot\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

ہم جانتے ہیں کہ $\cot^{-1}$ کی سمت کی بنیادی قدر $(0,\pi)$ ہے اور $\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{-1}{\sqrt{3}}$

اس لیے $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ کہ بنیادی قدر $\frac{2\pi}{3}$ ہے۔

مشق 2.1

ذیل کی اصل قیمتیں معلوم کیجیے۔

1. $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$
2. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
3. $\operatorname{cosec}^{-1}(2)$
4. $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$
5. $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$
6. $\tan^{-1}(-1)$
7. $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$
8. $\cot^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$
9. $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$
10. $\operatorname{cosec}^{-1}\left(-\sqrt{2}\right)$

ذیل کی قدریں معلوم کیجیے:

11. $\tan^{-1}(1)+\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$
12. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

13۔ اگر $\sin^{-1}x=y$، تب

(A) $0\le y\le\pi$ (B) $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$

(C) $0<y<\pi$ (D) $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$

14۔ $\tan^{-1}\sqrt{3}-\sec^{-1}(-2)$ برابر ہے

A. π (B) $-\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{3}$ (E) $\frac{2\pi}{3}$

2.3 معکوس ٹرگنومیٹریائی تفاعلات کی خصوصیات

اس حصہ میں ہم کچھ معکوس ٹرگنومیٹریائی فنکشن کی خصوصیات ثابت کریں گے۔ یہاں یہ بتایا جا سکتا ہے کہ یہ نتائج معکوس

ٹرگنومیٹریائی فنکشن کی اصل قیمت والی شاخوں کے اندر معتبر نہیں اور جب کبھی بھی ان کی تعریف بیان کی جائے۔ ممکن ہے کہ کچھ نتائج معلوم ٹرگنومیٹریائی فنکشن کی تمام قدروں کے لیے معتبر نہ ہو۔ ہم وقفہ میں x وقفہ کی ان قدروں کے تفصیل میں نہیں جائیں گے کیونکہ یہ بحث و مباحثہ اس کتاب کی حد سے باہر ہے۔ اصلیت میں وہ x کی کچھ قدروں کے لیے معتبر ہوں جن کے لیے معکوس ٹرگنومیٹریائی فنکشن کے لیے بیان کیا گیا ہو۔

ذرا ہم یہ دہراتے ہیں کہ اگر $y = \sin^{-1}x$ تب $x=\sin y$ اور، اگر $x = \sin y$ تب $y = \sin^{-1}x$ یہ مندرجہ ذیل کے معادل ہیں

$$\sin(\sin^{-1} x) = x,\ x \in [-1, 1] \text{ اور } \sin^{-1}(\sin x) = x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

اس طرح دوسرے پانچ معکوس ٹرگنومیٹریائی فنکشن کے لیے بھی یہی صحیح ہے۔

1. (i) $\mathbf{\sin^{-1}\frac{1}{x} = \operatorname{cosec}^{-1} x,\ x \geq 1}$ or $\mathbf{x \leq -1}$

(ii) $\mathbf{\cos^{-1}\frac{1}{x} = \sec^{-1} x,\ x \geq 1}$ or $\mathbf{x \leq -1}$

(iii) $\mathbf{\tan^{-1}\frac{1}{x} = \cot^{-1} x,\ x > 0}$

اس پہلے نتیجے کو ثابت کرنے کے لیے، ہم $\operatorname{cosec}^{-1} x = y$ رکھتے ہیں یعنی $x = \operatorname{cosec} y$

اس لیے $\frac{1}{x} = \sin y$

اس طرح $\sin^{-1}\frac{1}{x} = y$

یا $\sin^{-1}\frac{1}{x} = \operatorname{cosec}^{-1} x$

اسی طرح، ہم دوسرے حصے بھی ثابت کر سکتے ہیں۔

2. (i) $\mathbf{\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x,\ x \in [-1, 1]}$

(ii) $\mathbf{\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x,\ x \in R}$

(iii) $\mathbf{\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1} x,\ |x| \geq 1}$

مان لیجیے $\sin^{-1}(-x) = y$ یعنی $-x = \sin y$ تاکہ $x = -\sin y$، یعنی $x = \sin(-y)$

اس لیے $\sin^{-1} x = -y = -\sin^{-1}(-x)$

اس طرح $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$

اس طرح، ہم دوسرے حصے بھی ثابت کر سکتے ہیں۔

3. (i) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x, x \in [-1, 1]$

(ii) $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}|x| \geq 1$

(iii) $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1}x, x \in \mathbf{R}$

مان لیجیے $\cos^{-1}(-x) = y$ یعنی $-x = \cos y$ تاکہ $x = -\cos y = \cos(\pi - y)$ ہو

اس لیے $\cos^{-1}x = \pi - y$

اس طرح $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$

اسی طرح، ہم دوسرے حصے بھی ثابت کر سکتے ہیں۔

4. (i) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1]$

(ii) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}, x \in \mathbf{R}$

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}, |x| \geq 1$

مان لیجیے $\sin^{-1}x = y$، تب $x = \sin y = \cos\left[\frac{\pi}{2} y\right]$

اس لیے $\cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}x$

اس طرح $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

اسی طرح سے ہم دوسرے حصے ثابت کر سکتے ہیں۔

5. (i) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1+xy}, xy < 1$

(ii) $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}, xy < -1$

(iii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{x \quad y}{1-xy}\right) xy > 1, xy > 0$

مان لیجئے $\tan^{-1}x = \theta$ اور $\tan^{-1}y = \phi$ – تب $x = \tan\theta$ ، $y = \tan\phi$

اب $\tan(\theta+\phi) = \dfrac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi} = \dfrac{x+y}{1-xy}$

یہ دیتا ہے $\theta + = \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$

اس لئے $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1} = \dfrac{x+y}{1-xy}$

اوپر کے نتیجے میں اگر ہم y کو $-y$ سے تبدیل کردیں، تو ہمیں دوسرا نتیجہ ملتا ہے اور اگر y کو x کو سے تبدیل کر دیا جائے تو ہمیں تیسرا نتیجہ ملتا ہے۔

6. (i) $\mathbf{2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}, |x| \le 1}$

(ii) $\mathbf{2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}, x \ge 0}$

(iii) $\mathbf{2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}, -1 < x > 1}$

مان لیجئے $\tan^{-1}x = y$ ، تب $x=\tan y$ ہے اب

$$\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \sin^{-1}\frac{2\tan y}{1+\tan^2 y}$$

$$= \sin^{-1}(\sin 2y) = 2y = 2\tan^{-1}x$$

ساتھ ہی $\cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \cos^{-1}\dfrac{1-\tan^2 y}{1+\tan^2 y} = \cos^{-1}(\cos 2y) = 2y = 2y^{-1}\,x$

(iii) اسی طرح حاصل کیا جاسکتا ہے

اب ہم کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 3 دکھایئے کہ

(i) $\sin^{-1} = \left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sin^{-1} - x, \dfrac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\sin^{-1} = \left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1}x, \dfrac{1}{\sqrt{2}} \le x \le$

حل

(i) مان لیجیے $x = \sin\theta$ – تب $\sin^{-1} x = \theta$ ہوگا۔ ہمارے پاس ہے

$$\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \sin^{-1}\left(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)$$

$$= \sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta$$

$$= 2\sin^{-1} x$$

(ii) $x = \cos\theta$ لیجیے، تب اوپر کی طرح آگے بڑھانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے،

مثال 4 دکھایئے کہ $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{2}{11} = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

حل خاصیت 5(i) سے، ہمارے پاس ہے۔

$$\text{R.H.S.}\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{2}{11} == \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{11}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{11}} = \tan^{-1}\frac{15}{20}\tan^{-1}\frac{3}{4}\text{R.H.S.}$$

مثال 5 $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right), -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ کو آسان ترین شکل میں دکھایئے۔

حل ہم لکھتے ہیں

$$\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$$

دوسرے طریقے سے

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\sin\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\cot\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)\right] = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi-2x}{4}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$$

مثال 6 $\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right), |x|>1$ کو آسان ترین شکل میں لکھیے

حل مان لیجیے $x = \sec\theta$ تب $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2\theta-1} = \tan\theta$

اس لئے $\cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \cot^{-1}(\cot\theta) = \theta = \sec^{-1}x$ ہے جو کہ آسان ترین شکل ہے۔

مثال 7 ثابت کیجیے $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right), |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$

حل مان لیجیے کہ $x = \tan\theta$ ہے۔ تب $\theta = \tan^{-1}x$ ہمارے پاس ہے

$$\text{R.H.S.} = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\tan 3\theta) = 3\theta = 3\tan^{-1}x = \tan^{-1}x + 2\tan^{-1}x$$

$$= \tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} \text{ L.H.S.}$$ (کیوں؟)

مثال 8 $\cos(\sec^{-1}x+\operatorname{cosec}^{-1}x),\ |x|\ge 1$ کی قدر معلوم کیجیے

حل ہمارے پاس $\cos(\sec^{-1}x+\operatorname{cosec}^{-1}x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

مشق 2.2

ذیل کو ثابت کیجیے

1. $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3),\ x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

2. $3\cos^{-1}x=\cos^{-1}(4x^3-3x),\ x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$

3. $\tan^{-1}\frac{2}{11}+\tan^{-1}\frac{7}{24}=\tan^{-1}\frac{1}{2}$

4. $2\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{31}{17}$

ذیل فنکشن کو آسان ترین شکل میں لکھیے

5. $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\ x\neq 0$

6. $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ |x|>1$

7. $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right),\ x>\pi$

8. $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right),\ \frac{-\pi}{4}<x\ Ð\ \frac{3\pi}{4}$

9. $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ |x|<a$

10. $\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x-x^3}{a^3-3ax^2}\right),\ a>0;\ \frac{-a}{\sqrt{3}}\le x\le\frac{a}{\sqrt{3}}$

ذیل میں ہر ایک کی قدریں معلوم کیجیے۔

11. $\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$

12. $\cot(\tan^{-1}a+\cot^{-1}a)$

13۔ $\tan\frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right],\ |x|<1,\ y>0$ اور $xy<1$

14۔ اگر $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5}+\cos^{-1}x\right)=1$ ہو، تب 'x' کی قدر معلوم کیجیے۔

15۔ اگر $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{\pi}{4}$، تب x کی قدر معلوم کیجیے۔

مشق 16 تا 18 ہر ایک عبارت میں قدریں معلوم کیجیے۔

16. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

17. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

18. $\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$

19۔ $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ کے برابر ہے

(A) $\frac{7\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

20۔ $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}(-\frac{1}{2})\right)$ کے برابر ہے

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 1

21۔ $\tan^{-1}\sqrt{3}-\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ کے برابر ہے

(A) π (B) $-\frac{\pi}{2}$ (C) 0 (D) $2\sqrt{3}$

متفرق مثالیں

مثال 9 $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{5})$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل ہم جانتے ہیں کہ $\sin^{-1}(\sin x)=x$ ۔ اس لئے $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{5})=\frac{3\pi}{5}$

لیکن $\frac{3\pi}{5}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$، جوکہ $\sin^{-1}x$ کی سربراہی شاخ ہے۔

حالانکہ $\sin(\frac{3\pi}{5})=\sin(\pi-\frac{3\pi}{5})=\sin\frac{2\pi}{5}$ اور $\frac{2\pi}{5}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

اس لئے $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{5})=\sin^{-1}(\sin\frac{2\pi}{5})=\frac{2\pi}{5}$

مثال 10 دکھائیے کہ $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$

حل مان لیجیے کہ $\sin^{-1}\frac{3}{5} = x$ اور $\sin^{-1}\frac{8}{17} = y$ ہے۔

اس لئے $\sin x = \frac{3}{5}$ اور $\sin y = \frac{8}{17}$

ہمارے پاس ہے $\cos (x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$$= \frac{4}{5}\times\frac{15}{17}+\frac{3}{5}\times\frac{8}{17} = \frac{84}{85}$$

اس لئے $x - y = \cos^{-1}\left(\frac{84}{85}\right)$

اس طرح $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$

مثال 11 دکھائیے کہ $\sin^{-1}\frac{12}{13} + \cos^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{63}{16} = \pi$

حل مان لیجیے کہ $\sin^{-1}\frac{12}{13} = x, \quad \cos^{-1}\frac{4}{5} = y, \tan^{-1}\frac{63}{16} = z$

تب $\sin x = \frac{12}{13}, \quad \cos y = \frac{4}{5}, \quad \tan z = \frac{63}{16}$

اس لئے $\cos x = \frac{5}{13}, \sin y = \frac{3}{5}, \tan x = \frac{12}{5}$ and $\tan y = \frac{3}{4}$ ہے۔

ہمارے پاس ہے $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\frac{12}{5}+\frac{3}{4}}{1-\frac{12}{5}\times\frac{3}{4}} = -\frac{63}{16}$

اس لئے $\tan(x+y) = -\tan z$

یعنی $\tan (x + y) = \tan (-z)$ یا $\tan (x + y) = \tan (\pi - z)$

اس لئے $x + y = - z$ یا $x + y = \pi - z$

کیونکہ x, y اور z مثبت ہیں، $x + y \neq -z$ (کیونکہ؟)

اس لئے $x + y + z = \pi$ یا $\sin^{-1}\frac{12}{13}+\cos^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{63}{16} = \pi$

مثال 12 $\tan^{-1}\left[\dfrac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right]$، اگر $\dfrac{a}{b}\tan x > -1$ کو آسان کیجیے۔

حل ہمارے پاس ہے

$$\tan^{-1}\left[\frac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\dfrac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x}}{\dfrac{b\cos x + a\sin x}{b\cos x}}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\dfrac{a}{b} - \tan x}{1 + \dfrac{a}{b}\tan x}\right]$$

$$= \tan^{-1}\frac{a}{b} - \tan^{-1}(\tan x) = \tan^{-1}\frac{a}{b} - x$$

مثال 13 $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \dfrac{\pi}{4}$ کو حل کیجیے

حل ہمارے پاس ہے $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \dfrac{\pi}{4}$

یا $\tan^{-1}\left(\dfrac{2x+3x}{1-2x\times 3x}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

یعنی $\tan^{-1}\left(\dfrac{5x}{1-6x^2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

اس لئے $\dfrac{5x}{1-6x^2} = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$

یعنی $6x^2 + 5x - 1 = 0$، $(6x-1)(x+1) = 0$

جو دیتا ہے $x = -1$ یا $x = \dfrac{1}{6}$

کیونکہ $x = -1$ مساوات کو مطمئن نہیں کرتا، جیسا کہ مساوات کی .L.H.S منفی ہو جاتی ہے۔ $x = \dfrac{1}{6}$ دی ہوئی مساوات کو اکلوتا حل ہے۔

باب 2 پر مبنی متفرق مثالیں

ذیل کی قدر معلوم کیجیے۔

1. $\cos^{-1}\left(\cos\dfrac{13\pi}{6}\right)$

2. $\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{7\pi}{6}\right)$

ثابت کیجیے کہ

3. $2\sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{24}{7}$

4. $\sin^{-1}\frac{8}{17} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{77}{36}$

5. $\cos^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \cos^{-1}\frac{33}{65}$

6. $\cos^{-1}\frac{12}{13} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \sin^{-1}\frac{56}{65}$

7. $\tan^{-1}\frac{63}{16} = \sin^{-1}\frac{5}{13} + \cos^{-1}\frac{3}{5}$

8. $\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

ثابت کیجیے کہ

9. $\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right), x \in [0, 1]$

10. $\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right) = \frac{x}{2}, x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

11۔ $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1} x, -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$ [اشارہ کیجیے $x=\cos 2\theta$ رکھیے]

12. $\frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{1}{3} = \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}$

ذیل مساواتوں کو حل کیجیے:

13. $2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\,\mathrm{cosec}\, x)$

14. $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\tan^{-1} x, (x > 0)$

15۔ $\sin(\tan^{-1} x), |x| < 1$ برابر ہے

(A) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (D) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

16۔ ہے،تب x برابر ہے

(A) $0, \frac{1}{2}$ (B) $1, \frac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

17۔ $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - \tan^{-1}\frac{x-y}{x+y}$ برابر ہے

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

خلاصہ (Summary)

- معکوس ٹرگنومیٹریائی فنکشن کی علاقے اور وسعتیں (اصل قیمت شاخیں) ذیل جدول میں دی گئی ہیں۔

فنکشن	حلقہ	وسعت سربراہی قدر کی شاخیں
$\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	[–1,1]	$y=\sin^{-1}x$
[0,θ]	[–1,1]	$y=\cos^{-1}x$
$\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$	**R**–(–1,1)	$y=\text{cosec}^{-1}x$
$[0,\pi]-\{\frac{\pi}{2}\}$	**R**–(–1,1)	$y=\sec^{-1}x$
$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	**R**	$[0,\pi]-\{\frac{\pi}{2}\}$
[0,π]	**R**	$y=\cot^{-1}x$

- $\sin^{-1}x$ کو $(\sin x)^{-1}$ کے ساتھ نہ الجھائیں۔ حقیقت میں $\frac{1}{\sin x}$ $(\sin)^{-1}$ اور اسی طرح دوسرے ٹرگنومیٹریائی فنکشن کے لئے۔
- ایک معکوس ٹرگنومیٹریائی فنکشن کی قدر جو کہ اپنی اصل قیمت شاخ میں واقع ہے۔اس معکوس میں ٹرگنومیٹریائی فنکشن کی اصل قیمت کہلاتی ہے۔

علاقہ کی مناسب قدروں کے لیے ہمارے پاس ہے۔

- $y=\sin^{-1}x \Rightarrow x=\sin y$
- $x=\sin y \Rightarrow y=\sin^{-1}x$
- $x=\sin\left(\sin^{-1}x\right)=x$
- $\sin^{-1}\left(\sin x\right)=x$
- $\sin^{-1}\frac{1}{x}=\text{cosec}^{-1}x$
- $\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x$

- $\cos^{-1}\dfrac{1}{x} = \sec^{-1} x$
- $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x$
- $\tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \cot^{-1} x$
- $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$
- $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$
- $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$
- $\tan^{-1}x + \cot^{-1} = \dfrac{\pi}{2}$
- $\mathrm{cosec}^{-1}(-x) = -\mathrm{cosec}^{-1} x$
- $\sin^{-1}x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$
- $\mathrm{cosec}^{-1}x + \sec^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$
- $\tan^{-1}x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$
- $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$
- $\tan^{-1}x - \tan^{-1} == \tan^{-1}\dfrac{x-y}{1+xy}$
- $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

تاریخ کے اوراق

ٹرگنومیٹری کا مطالعہ پہلے ہندوستان میں شروع ہوا تھا۔ پرانے زمانے کے ہندوستانی ریاضی داں آریہ بھٹ (476A.D.)، برہم گپتا (598 A.D.)، بھاسکرI (600 A.D.) اور بھاسکرII (1114A.D.) ٹرگنومیٹری کے اہم نتائج حاصل ہوئے۔ یہ تمام معلومات ہندوستان سے عرب تک گئی اور پھر اس کے بعد وہاں سے یورپ تک۔ گریک کے لوگوں نے بھی ٹرگنومیٹری کا مطالعہ شروع کر دیا تھا، لیکن ان کے کام کرنے کا طریقہ بہت آہستہ تھا کہ جب ہندوستانی کام کو جانا گیا، یہ فوراً پوری دنیا میں اپنا لیا گیا۔

ہندوستان میں، جدید ٹرگنومیٹریائی فنکشن سے پہلے، اسے ایک زاویہ کا سائن (sine) کہا جاتا تھا، اور سائن فنکشن کا تعارف ریاضی میں سیدھا متاس (سنسکرت کا علمِ فلکی کا کام) اصل دین تھا۔

بھاسکرI (600A.D. کے لگ بھگ) نے 90° سے زیادہ سائن فنکشن کی قدر معلوم کرنے کے لئے، فارمولہ دیا

تھا۔سولہویں صدی کے ملیالم کے کام یوکتی بھاسا(Yuktibhasa) میں sin(A+B) کے پھیلاؤ کا ثبوت ہے۔ 18°, 36°, 54°, 72° وغیرہ کے سائن یا کوسائن کا بالکل ایک خیال بھاسکر II نے دیا تھا۔

$\sin^{-1} x$ ، $\cos^{-1} x$ وغیرہ کی علامتیں،قوس $\sin x$ قوس $\cos x$ وغیرہ اجرام فلکی کے ماہر سر جون ایف۔ ڈبلیو۔ ہرسیجل (1813)(Sir John F.W. Hersehel) نے بتائی تھیں۔ تھیلس (Thales) کا نام اونچائی اور فاصلوں کے مسئلہ کے ساتھ بغیر مشتق پیچ کے ساتھ جڑا ہے۔اس کو عزت سے مصر میں موجود عظیم ہرم (Pyramid) کی اونچائی معلوم کرنے کے ساتھ جڑا ہوا ہے۔ یہ اونچائی ہرم کی پرچھائی کو ناپنے سے معلوم ہوتی ہے اور ایک معاون اسٹاف (یا گنومون) مانی ہوئی اور اونچائی کے ساتھ، اور نسبت کا مقابلہ کرنے پر۔

$$\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{S}} = \frac{h}{s} = \tan\ (\text{سورج کا ارتقا})$$

یہ بھی کہا جاتا ہے کہ تھیلس نے ایک کشتی کا فاصلہ سمندر پر یکساں مثلثوں کے ضلع کی نسبت سے معلوم کیا تھا۔ پرانے ہندوستانی کام میں اونچائی اور فاصلے پر مبنی مسئلہ یکسانی خصوصیت کا استعمال کر کے کیا جاتا تھا۔