باب **1**

5259CH01

رشتے اور تفاعلات
(RELATIONS AND FUNCTIONS)

❖ دنیا میں بدصورت ریاضی کے لئے کوئی مستقل جگہ نہیں ہے۔ ریاضی کی خوبصورتی کو بیان کرنا بہت مشکل ہے لیکن یہ اتنا ہی سمجھ ہے جتنا کہ کسی بھی خوبصورتی کو بیان کرنا، ہم بالکل صحیح نہیں جانتے کہ ایک خوبصورت نظم کا کیا مطلب ہے، لیکن وہ ہمیں کسی کو بھی پہچاننے سے نہیں روکتا جب ہم اسے پڑھتے ہیں جی۔ ایچ۔ ہارڈی ❖

1.1 تعارف

اسے یاد کیجیے کہ رشتے اور تفاعلات، علاقہ، ہم علاقہ اور وسعت کے تصّور سے گیارہویں جماعت میں ہی متعارف کرادیا گیا ہے جس میں مختلف قسم کے حقیقی قدر والے تفاعلات اور ان کے گراف بھی شامل ہیں۔ ریاضی میں اصطلاح 'رشتہ' کا مطلب وہی ہے جو انگریزی زبان ہے، جس کے مطابق دو اشیا یا چیزوں کا ایک دوسرے سے موازنہ کیا جاتا ہے اگر دونوں اشیا یا مقادیر کے درمیان ایک تعلق ہوتا ہے اگر دونوں کے درمیان ایک ربط ہو۔ مان لیجیے اگر ایک اسکول کے بارہویں جماعت کے طلباء کا ایک سیٹ A ہے اور اسی اسکول کے گیارہویں جماعت کے طلباء کا سیٹ B ہے۔ تب A سے B کے رشتہ کی کچھ مثالیں اس طرح ہیں۔

لیجیو نے ڈیرچلیٹ
(1805-1859)

(i) $\{(a, b) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}:$ a، b کا بھائی ہے$\}$

(ii) $\{(a, b) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}:$ a، b کی بہن ہے$\}$

(iii) $\{(a, b) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}:$ a کی عمر b کی عمر سے زیادہ ہے$\}$

(iv) $\{(a, b) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}:$ a کے ذریعے حاصل کیے گئے سالانہ امتحان میں کل نمبر b کے ذریعے حاصل کئے گئے سالانہ امتحان میں کل نمبر سے کم ہیں$\}$

(v) $\{(a, b) \in A \times B :$ a اسی علاقہ میں رہتا ہے جہاں b رہتا ہے$\}$ لیکن اس سے نتیجہ اخذ کرتے ہوئے ہم A سے B کا رشتہ R کو ریاضیاتی طور پر ایک A×B کا اختیاری ذیلی سیٹ کے طور پر بیان کرتے ہیں۔

اگر $(a,b) \in R$، ہم کہتے ہیں کہ a کا b سے رشتہ R کے ماتحت ایک تعلق ہے اور اسے $a \, R \, b$ لکھتے ہیں۔ عام طور پر، $(a,b) \in R$ ہم اس کی قطعی فکر نہیں کرتے کہ کیا a اور b کے درمیان کوئی قابل پہچان کوئی ربط یا تعلق ہے۔ جیسا کہ گیارہویں جماعت میں دیکھا گیا ہے کہ، تفاعلات خاص قسم کے رشتہ ہوتے ہیں۔

اس باب میں ہم مختلف قسم کے رشتوں اور تفاعلات کے بارے میں مطالعہ کریں گے، تفاعلات کی ترکیب، قابل تعکیس تفاعل فنکشن اور دوعنصری عمل۔

1.2 رشتوں کی قسمیں (Types of Relations)

اس سیکشن میں ہم مختلف قسم کے رشتوں کا مطالعہ کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ ایک سیٹ A میں رشتہ $A \times A$ کا ذیلی سیٹ ہے۔ اس طرح، خالی سیٹ ϕ اور $A \times A$ دو طرفین رشتہ ہیں۔ سمجھانے کے لئے سیٹ A={1,2,3,4) میں رشتہ R پر غور کیجیے جو کہ $R=\{(a,b): a-b = 10\}$ سے دیا گیا ہے۔ یہ ایک خالی سیٹ ہے، کیونکہ کوئی بھی جوڑا (a,b) شرط، $a-b = 10$ کو مطمئن نہیں کرتا۔ اسی طرح $R'=\{(a,b) : |a-b| \geq 0\}$ مکمل سیٹ $A \times A$ ہے کیونکہ $A \times A$ میں تمام جوڑے (a, b)، $|a-b| \geq 0.$ کو مطمئن کرتے ہیں۔ ان دو مثالوں سے ہم ذیل میں دی گئی تعریفوں کو بیان کر سکتے ہیں۔

تعریف 1 سیٹ A میں ایک رشتہ R خالی رشتہ کہلاتا ہے، اگر A کا کوئی بھی عنصر کا تعلق A کے کسی بھی عنصر سے نہیں ہے، یعنی،

$R = \phi \subset A \times A$ ۔

تعریف 2 سیٹ A میں ایک رشتہ R آفاقی رشتہ کہلاتا ہے، اگر A کا ہر عنصر، A کے ہر ایک عنصر سے تعلق رکھتا ہے، یعنی، $R = A \times A$۔

دونوں خالی رشتہ اور آفاقی رشتہ اکثر ادنیٰ رشتے کہلاتے ہیں۔

مثال 1 مان لیجئے ایک لڑکوں کے اسکول کے تمام طلباء کا سیٹ A ہے۔ دکھایئے کہ رشتہ R، A میں جو کہ $R = \{(a,b) :$ a کی بہن ہے $b\}$ سے دکھایا گیا ہے ایک خالی رشتہ ہے اور $R' = \{(a,b) :$ a اور b کے قدوں کا فرق 3 میٹر سے کم ہے$\}$ آفاقی رشتہ ہے۔

حل کیونکہ اسکول ایک لڑکوں کا اسکول ہے، اسکول کا کوئی بھی طالب علم اسکول کے کسی طالب علم کی بہن نہیں ہو سکتی۔ اس لیے، $R=\phi$ جو دکھاتا ہے کہ R ایک خالی رشتہ ہے۔ اور یہ بھی صاف ہے کہ اسکول کے دو طلباء کے قدوں کا فرق 3 میٹر سے کم ہونا چاہئے۔ یہ دکھاتا ہے کہ $R' = A \times A$ ایک آفاقی رشتہ ہے۔

ریمارک گیارہویں جماعت میں ہم نے رشتہ کو ظاہر کرنے کے دو طریقے دیکھے تھے جن کے نام ہیں روسٹر طریقہ اور سیٹ ساز طریقہ۔ حالانکہ سیٹ $\{1,2,3,4\}$ میں ایک رشتہ جو کہ $R=\{(a,b): b=a+1\}$ سے بیان کیا گیا ہے $a\ R\ b$ سے بہت سے مصنفوں نے بھی دکھایا ہے اگر اور صرف اگر $b=a+1$۔ ہم اس علامت کا استعمال جہاں موزوں ہو کر سکتے ہیں۔

اگر $(a,b) \in R$، ہم کہتے ہیں کہ a کا تعلق b سے ہے اور ہم اسے $a\ R\ b$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

ایک بہت ہی اہم رشتہ، جو کہ ریاضی میں بہت اہم کردار ادا کرتا ہے معادلتی رشتہ ہے۔ معادلت کے رشتہ کا مطالعہ کرنے کے لئے، ہم پہلے تین قسم کے رشتوں پر غور کرتے ہیں، جن کے نام ہیں رجوعی، متشاکل اور انتقالی۔

تعریف 3 ایک رشتہ R ایک سیٹ A میں کہلاتا ہے

(i) رجوعی، اگر $(a,a) \in R$، ہر ایک $a \in R$ کے لئے،

(ii) متشاکل، اگر $(a_1,a_2) \in R$ سے ملتا ہے $(a_2,a_1) \in R$ تمام $a_1,a_2 \in A$ کے لئے،

(iii) انتقالی، اگر $(a_1,a_2) \in R$ اور $(a_2,a_3) \in R$ سے نکلتا ہے $(a_1,a_3) \in R$، تمام $a_1,a_2a_3 \in A$ کے لئے۔

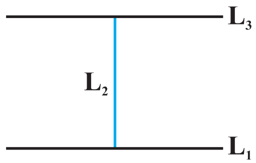
تعریف 4 ایک رشتہ R ایک سیٹ A میں ایک معادلتی رشتہ کہلاتا ہے اگر R رجوعی، متشاکل اور انتقالی ہو۔

مثال 2 مان لیجئے ایک مستوی میں T تمام مثلثوں کا سیٹ ہے رشتہ R کے ساتھ T میں جو کہ دیا گیا ہے $R = \{(T_1,T_2)$ ہے $T_1,T_2\}$ کے متماثل ہے۔ دکھایئے کہ R ایک معادلتی رشتہ ہے۔

حل R رجوعی ہے، کیونکہ ہر مثلث اپنے آپ کے متماثل ہوتا ہے۔ مزید $(T_1,T_2) \in R \Rightarrow T_1$ کا مطلب ہے T_1 ⇐ T_2 کے متماثل ہے اسی سے ملتا ہے کہ (T_1,T_2)، کے متماثل ہے۔ $R \Rightarrow (T_2,T_1) \in R$ اس لیے، R متشاکل ہے۔ اس کے علاوہ $(T_1,T_2), (T_2,T_3) \in R$ کا مطلب ہے T_1 متماثل ہے T_2 کے اور T_2 متماثل ہے T_3 کے اس لیے T_1 متماثل ہے T_3 کے اس لیے R ایک معادلتی رشتہ ہے۔

مثال 3 مان لیجیے مستوی L، تمام خطوط کا سیٹ ہے اور L,R میں ایک رشتہ ہے جو اس طرح بیان کیا گیا ہے $\{(L_2,L_1)$ پر عمود ہے $R = \{(L_1,L_2)$ ۔ دکھائیے کہ R متشاکل ہے لیکن نہ تو رجوعی اور نہ ہی انتقالی ہے۔

حل R رجوعی نہیں ہے، کیونکہ خط L_1 اپنے آپ پر عمود نہیں ہوسکتا، یعنی $R(L_1,L_1) \notin R$ متشاکل ہے کیونکہ $(L_1,L_2) \in R$



شکل 1.1

$\Leftarrow$ L_2,L_1 پر عمود ہے

$\Leftarrow$ L_1,L_2 پر عمود ہے

$\Leftarrow$ $L_2,L_2 \in R$

R انتقالی نہیں ہے۔ کیونکہ، اگر L_2L_1 پر عمود ہے اور L_3L_2 پر عمود ہے، تب L_3L_1 پر کبھی بھی عمود نہیں ہوسکتا۔ حقیقت میں، L_3L_1 پر متوازی ہے، یعنی۔ R——— $(L_1,L_2) \in R, L_2,L_3 \in R$ لیکن $(L_1,L_3) \notin R$

مثال 4 دکھائیے کہ رشتہ R سیٹ $\{1,2,3\}$ میں دیئے گئے $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3)\}$ میں رجوعی ہے لیکن نہ تو متشاکل اور نہ ہی انتقالی ہے۔

حل R رجوعی ہے، کیونکہ $(1,1)$, $(2,2)$ اور $(3,3)$، R میں واقع ہیں۔ ساتھ ہی، R متشاکل نہیں ہے، کیونکہ $(1,2) \in R$ لیکن $(1,2) \notin R$۔ اسی طرح، R انتقالی نہیں ہے، کیونکہ $(1,2) \in R$ اور $(2,3) \in R$ لیکن $(1,3) \notin R$۔

مثال 5 دکھائیے کہ رشتہ R صحیح اعداد کے سیٹ Z میں جو کہ دیا گیا ہے۔

$$R = \{(a,b): 2 \text{ کو تقسیم کرتا ہے } a-b\}$$

ایک معادلتی کا رشتہ ہے۔

حل R رجوعی ہے، کیونکہ 2 تمام $a \in Z$ کے لیے $(a-a)$ کو تقسیم کرتا ہے۔ مزید اگر $(a,b) \in R$، جو دکھاتا ہے کہ 2، a-b کو تقسیم کرتا ہے اس لیے 2، b-a کو بھی تقسیم کرے گا اس لیے R متشاکل ہے۔ اسی طرح، اگر $(a,b) \in R$، تب $a-b$ اور 2، $b-c$ سے تقسیم ہوسکتا ہے۔ اب $a-c=(a-b)+(b-c)$ ایک جفت ہے (کیوں؟)۔ اس طرح، $(a-c)$، 2 سے تقسیم ہوسکتا ہے۔ یہ دکھاتا ہے کہ R انتقالی ہے۔ اس لیے Z,R میں ایک معادلتی کا رشتہ ہے۔

مثال 5 میں یہ بات نوٹ کر لیجئے، کہ تمام جفت صحیح اعداد کا تعلق صفر سے ہے، کیونکہ $(0, \pm 2)$، $(0, \pm 4)$ وغیرہ۔ R میں واقع ہیں اور کسی بھی طاق صحیح عدد کا تعلق صفر سے نہیں ہے، کیونکہ $(0, \pm 1)$، $(0, \pm 3)$ وغیرہ وغیرہ R میں واقع نہیں ہے۔ اسی طرح، تمام طاق صحیح اعداد کا تعلق 1، سے ہے اور کسی بھی جفت صحیح اعداد کا تعلق 1، سے نہیں ہے۔ اس لئے تمام جفت صحیح اعداد کا سیٹ E اور تمام طاق صحیح اعداد کا سیٹ O، Z کے ذیلی سیٹ ہیں جو ذیل شرائط کو مطمئن کرتا ہے:

(i) E کے تمام عناصر کا تعلق ایک دوسرے سے ہے اور O، کے تمام عناصر کا تعلق ایک دوسرے سے ہے۔

(ii) E کے کسی بھی عنصر کا O کے کسی بھی عنصر سے تعلق نہیں ہے اور اس کے برعکس۔

(iii) E اور O غیر شریک ہیں اور $Z = E \cup O$۔

ذیلی سیٹ E معادلت کلاس کہلاتا ہے جس میں صفر شامل ہے اور اسے [0] سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی طرح، O معادلتی کلاس ہے جس میں، 1، شامل ہے اور [1] سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہ بات نوٹ کر لیجئے کہ $[0] \neq [1], [0] = [2r]$ اور $[1] = [2r + 1]$، جہاں $r \in Z$۔ حقیقت میں جو ہم نے اوپر ایک اختیاری معادلت رشتہ R ایک اختیاری سیٹ X میں، X,R کو باہمی غیر مشترک ذیلی سیٹ A_i میں تقسیم کرتا ہے جسے ہم X کے حصے یا ذیلی تقسیم کہتے ہیں جو ذیل کو مطمئن کرتا ہے۔

(i) تمام i، کے لئے A_i کے تمام عناصر ایک دوسرے سے تعلق رکھتے ہیں۔

(ii) $i \neq j$ کے لئے، A_i کا کوئی بھی عنصر A_j کے کسی بھی عنصر سے تعلق نہیں رکھتا۔

(iii) $\cup A_j = X$ اور $A_i \cap A_j = \phi, i \neq j$

ذیلی سیٹ A_i معادلتی کلاس کہلاتے ہیں۔ اس معاملہ کا دلچسپ حصہ یہ ہے کہ ہم اس کے برعکس بھی جا سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر، سیٹ Z کے تحت تقسیم میں باہمی غیر شریک ماتحت سیٹ A_1 A_2 اور A_3 سے دی گئی ہے جس کا اجماع **Z** ہے ذیل کے ساتھ

$$A_1 = \{x \in Z : \text{کا ضعف ہے } 3, x\} = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$$

$$A_2 = \{x \in Z : \text{کا ضعف ہے } 3, x-1\} = \{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$$

$$A_3 = \{x \in Z : \text{کا ضعف ہے } 3, x-2\} = \{..., -4, -1, 2, 5, 8, ...\}$$

ایک رشتہ R، **Z** میں بیان کیجئے جو کہ $R=\{(a,b): \text{جس کو تقسیم کرتا ہے } a-b, 3\}$ سے دیا گیا ہے۔ جیسا کہ مثال 5 میں

استعمال کیا گیا ہے، اسی طرح کی دلیل دے کر، ہم دکھا سکتے ہیں کہ R ایک معادلتی رشتہ ہے۔ ساتھ ہی A_1 تمام صحیح اعداد Z کے ساتھ میں ملتا ہے جن کا تعلق صفر سے ہے، A_2 تمام صحیح اعداد کے سیٹ کے ساتھ ملتا ہے جن کا تعلق 1، ہے اور A_3 تمام صحیح اعداد کے سیٹ کے ساتھ ملتا ہے جن کا تعلق 2 سے ہے۔ اس طرح $A_1 = [0], A_2 = [1]$ اور $A_3 = [2]$ ہے۔ حقیقت میں، $A_1 = [3r], A_2 = [3r + 1]$ اور $A_3 = [3r + 2]$ ہے، تمام $r \in Z$ کے لئے۔

مثال 6 مان لیجئے R ایک رشتہ ہے جو کہ سیٹ $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ میں $\mathbf{R} = \{(a,b)$: دونوں a اور b یا تو طاق ہیں یا جفت $\}$ سے بیان کیا گیا ہے۔ دکھائیے کہ R ایک معادلتی رشتہ ہے۔ اس کے آگے دکھائیے کہ ماتحت سیٹ $\{1,3,5,7\}$ کے تمام عناصر کا تعلق ایک دوسرے سے ہے اور ماتحت سیٹ $\{2,4,6\}$ کے تمام عناصر کا تعلق ایک دوسرے سے ہے، لیکن ماتحت سیٹ $\{1,3,5,7\}$ کے کسی بھی عنصر کا تعلق ماتحت سیٹ $\{2,4,6\}$ کے کسی عنصر سے نہیں ہے۔

حل A میں کوئی بھی عنصر a دیا گیا ہے، دونوں a اور a یا تو طاق ہوں گے یا جفت ہوں گے، تا کہ $(a,a) \in R$۔ اس کے آگے $(a,b) \in R \Rightarrow$ دونوں a اور b یا تو طاق ہوں گے یا جفت ہوں گے $\Rightarrow (b,a) \in R$۔ اسی طرح $(a,b) \in R$ اور $(b,c) \in R \Rightarrow$ تمام عناصر $a,b,$C یا تو جفت ہوں گے یا طاق ہمہ وقتی $(a,c) \in R$ اس لئے R ایک معادلتی رشتہ ہے۔

اس کے آگے، $\{1,3,5,7,\}$ کے تمام عناصر کا تعلق ایک دوسرے سے ہے، کیونکہ اس ماتحت سیٹ کے تمام عناصر طاق ہیں۔ اسی طرح، ماتحت سیٹ کے $\{2,4,6\}$ کے تمام عناصر کا تعلق ایک دوسرے سے ہے، کیوں کہ وہ تمام جفت ہیں۔ ساتھ ہی ماتحت سیٹ $\{1,3,5,7\}$ کا کوئی بھی عنصر $\{2,4,6\}$ کے کسی بھی عنصر سے تعلق نہیں رکھتا، کیونکہ $\{1,3,5,7\}$ کا کوئی بھی عنصر $\{2,4,6\}$ کے کسی بھی عنصر سے تعلق نہیں رکھتا، کیونکہ $\{1,3,5,7\}$ کے عناصر طاق ہیں، جب کہ $\{2,4,6\}$ کے عناصر جفت ہیں۔

مشق 1.1

1۔ دریافت کیجئے کہ کیا ہر ایک ذیل مثبت رجوعی ہے، متشاکل اور انتقالی ہیں:

(i) رشتہ R سیٹ $A = \{1, 2, 3, ..., 13, 14\}$ میں، $R = \{(x, y) : 3x - y = 0\}$ کی طرح بیان کیا گیا ہے۔

(ii) رشتہ R طبعی اعداد کے سیٹ میں اس طرح بیان کیا گیا ہے

$R = \{(x, y) : y = x + 5$ اور $x < 4\}$

(iii) رشتہ R سیٹ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ میں اس طرح بیان کیا گیا ہے

$R = \{(x, y)$: x,y سے تقسیم ہو جاتا ہے$\}$

(iv) رشتہ R صحیح اعداد کے سیٹ Z میں اس طرح بیان کیا گیا ہے

$R = \{(x, y)$: $x-y$ ایک صحیح عدد ہے$\}$

(v) رشتہ R انسانوں کے سیٹ A میں ایک شہر میں ایک خاص وقت پر اس طرح دیا گیا ہے

(a) $R = \{(x, y)$: x اور y ایک ہی جگہ کام کرتے ہیں$\}$

(b) $R = \{(x, y)$: x اور y ایک ہی محلے میں رہتے ہیں$\}$

(c) $R = \{(x, y)$: x، y سے صحیح 7 سینٹی میٹر لمبا ہے$\}$

(d) $R = \{(x, y)$: x، y کی بیوی ہے$\}$

(e) $R = \{(x, y)$: x، y کا والد ہے$\}$

2۔ دکھایئے کہ رشتہ R جو کہ حقیقی اعداد کے سیٹ **R** میں اس طرح بیان کیا گیا ہے $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$ نہ تو رجوعی ہے نہ ہی متشاکل اور نہ ہی انتقالی ہے۔

3۔ جانچ کیجئے کہ کیا رشتہ R جو کہ سیٹ $\{1,2,3,4,5,6\}$ میں اس طرح بیان کیا گیا ہے $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ رجوعی ہے، متشاکل یا انتقالی ہے۔

4۔ جانچئے کہ رشتہ R، **R** میں $R = \{(a, b) : a \leq b\}$ سے بیان کیا گیا ہے رجوعی ہے اور انتقالی ہے مگر متشاکل نہیں۔

5۔ جانچ کیجئے کہ کیا رشتہ R، **R** میں جو کہ $R = \{(a, b) : a \leq b^3\}$ سے بیان کیا گیا ہے رجوعی ہے، متشاکل ہے یا انتقالی۔

6۔ دکھایئے کہ رشتہ R سیٹ $\{1,2,3\}$ میں جو کہ $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ سے دیا گیا ہے متشاکل ہے لیکن نہ تو رجوعی ہے اور نہ ہی انتقالی ہے۔

7۔ دکھایئے کہ رشتہ R سیٹ A میں جو کہ ایک کالج کی لائبریری کی کتابوں کا سیٹ ہے اور دیا گیا ہے $R = \{(x,y)$: x اور y میں اوراق کی تعداد برابر ہے$\}$ سے ایک معادلت رشتہ ہے۔

8۔ دکھایئے کہ رشتہ R سیٹ $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ میں جو کہ دیا گیا ہے $R=\{(a,b)$: $|a-b|$ جفت ہے$\}$ سے ایک معادلتی رشتہ ہے۔ دکھایئے کہ $\{1,3,5\}$ کے تمام عناصر کا تعلق ایک دوسرے سے ہے اور $\{2,4\}$ کے تمام عناصر کا تعلق ایک دوسرے سے ہے۔ لیکن $\{1,3,5\}$ کے کسی بھی عنصر کا تعلق $\{2,4\}$ کے عنصر سے نہیں ہے۔

9۔ دکھائیے کہ ہر ایک رشتہ R سیٹ $A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \le x \le 12\}$ میں جو کہ دیا گیا ہے

(i) $R = \{(a,b) :$ $|a-b|$، 4 کا ضعف ہے$\}$

(ii) $R = \{(a, b) : a = b\}$

ایک معادلتی رشتہ ہے۔ ہر ایک کیس میں 1، سے تعلق رکھنے والے تمام عناصر کا سیٹ معلوم کیجیے۔

10۔ ایک رشتہ کی ایک مثال دیجئے۔ جو کہ ہے

(i) متشاکل ہے لیکن نہ تو رجوعی ہے اور نہ ہی انتقالی۔

(ii) انتقالی ہے لیکن نہ تو رجوعی ہے اور نہ ہی متشاکل ہے۔

(iii) رجوعی اور متشاکل ہے لیکن انتقالی نہیں۔

(vi) رجوعی اور انتقالی ہے لیکن متشاکل نہیں ہے۔

(v) متشاکل اور انتقالی ہے لیکن رجوعی نہیں۔

11۔ دکھائیے کہ رشتہ R جو کہ مستوی میں نقاط کے ایک سیٹ میں دیا گیا ہے $R = \{(P, Q) :$ نقطہ P کا فاصلہ مبدا سے یکساں ہے جیسا کہ نقطہ Q کا فاصلہ مبدا سے$\}$ سے ایک معادلتی رشتہ ہے۔ اس کے آگے، دکھائیے کہ تمام نقاط کا سیٹ نقطہ $P \ne (0, 0)$ جو کہ ایک دائرہ ہے اور P سے گزر رہا ہے مبدا اس کا مرکز ہے۔

12۔ دکھائیے کہ رشتہ R جو کہ تمام مثلثوں کے سیٹ A میں اس طرح بیان کیا گیا ہے $R=\{(T_1, T_2) :$ T_1 T_2 مشابہ ہیں$\}$ معادلتی رشتہ ہے۔ تین قائم زاوی مثلث T_1 جس میں اضلاع 3,4,5, ہیں، T_2 جس میں اضلاع 5,12,13 ہیں اور T_3 جس میں اضلاع 6,8,10 ہیں پر غور کیجئے۔ T_1, T_2 اور T_3 مثلث ہم رشتہ ہیں۔

13۔ دکھائیے کہ رشتہ R جو کہ تمام کثیر ضلعی کے سیٹ A میں $R = \{(P_1, P_2) :$ P_1 اور P_2 میں اضلاع کی تعداد برابر ہے$\}$ سے ظاہر کیا گیا ہے ایک معادلت رشتہ ہے۔ تمام عناصر کا سیٹ A میں، جو کہ قائم زاوی مثلث T جس کے اضلاع 3,4 اور 5 ہیں کا کیا تعلق ہے؟

14۔ مان لیجئے XY مستوی میں L، خطوط کا سیٹ ہے اور L,R میں ایک رشتہ ہے جو اس طرح بیان کیا گیا ہے $R = \{(L_1, L_2) :$ L_1, L_2 کے متوازی ہے$\}$ ۔ دکھائیے کہ R ایک معادلت رشتہ ہے۔ ان تمام خطوط کا سیٹ معلوم کیجیے جن کا تعلق خط $y = 2x + 4$ سے ہے۔

15۔ مان لیجئے R سیٹ {1,2,3,4} میں ایک رشتہ ہے جو کہ $R = \{(1,2), (2,2), (1,1), (4,4), (1,3), (3,3), (3,2)\}$ سے دیا گیا ہے۔ صحیح جواب چنئے۔

(A) R رجوعی اور متشاکل ہے لیکن انتقالی نہیں ہے۔

(B) R رجوعی اور انتقالی ہے لیکن متشاکل نہیں۔

(C) R متشاکل اور انتقالی ہے لیکن رجوعی نہیں۔

(D) R ایک معادلت رشتہ ہے۔

16۔ مان لیجئے سیٹ N میں R ایک رشتہ ہے جو کہ $R = \{(a, b) : a = b-2, b>6\}$ سے دیا گیا ہے۔ صحیح جواب چنئے۔

(A) $(2, 4) \in R$ (B) $(3, 8) \in R$ (C) $(6, 8) \in R$ (D) $(8, 7) \in R$

1.3 تفاعلات کی قسمیں (Types of Functions)

ایک تفاعلات کی علامت کچھ اہم تفاعلات کے ساتھ مثال کے طور پر اکائی تفاعلات، مستقل تفاعلات کثیر رکنی تفاعلات، ناطق تفاعلات، مقیاس تفاعلات، سنگم تفاعلات وغیرہ وغیرہ ان کے گرافوں کے ساتھ گیارہویں جماعت میں بتائے جا چکے ہیں۔ دو تفاعلات کا مجموعہ، تفریق، حاصل ضرب اور تقسیم کے بارے میں پڑھا جا چکا ہے۔ کیونکہ تفاعلات کا تصور ریاضی میں ایک عظیم اور خاص سوچ رکھتا ہے اور دوسرے مضامین میں بھی، ہم تفاعلات کے مطالعہ کو اس سے آگے بڑھانا چاہیں گے جہاں چھوڑا تھا۔ اس سیکشن میں ہم تفاعلات کی مختلف قسموں کا مطالعہ کریں گے۔

تفاعلات f_1, f_2, f_3 اور f_4 پر غور کیجئے جو کہ ذیل تصاویر میں دیئے گئے ہیں۔

شکل 1.2 میں ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ X_1 کے مختلف عناصر کی پرچھائیاں تفاعلات f_1 کے زیرِ سائے مختلف ہیں، لیکن f_2 کے زیر سائے X_1 کے دو عناصر کی پرچھائیاں یکساں ہیں، جن کا نام b ہے اس کے آگے، کچھ عناصر X_2 میں مثال کے طور پر e اور f ہیں جو کہ f_1 کے زیر سائے X_1 کے کسی بھی عناصر کی پرچھائی نہیں ہے جب کہ f_3 کے زیر سایہ X_1 کے کچھ عناصر کی پرچھائیاں ہیں۔ اوپر کا مشاہدہ ذیل کی تعریفوں کی طرف رہنمائی کرتا ہے۔

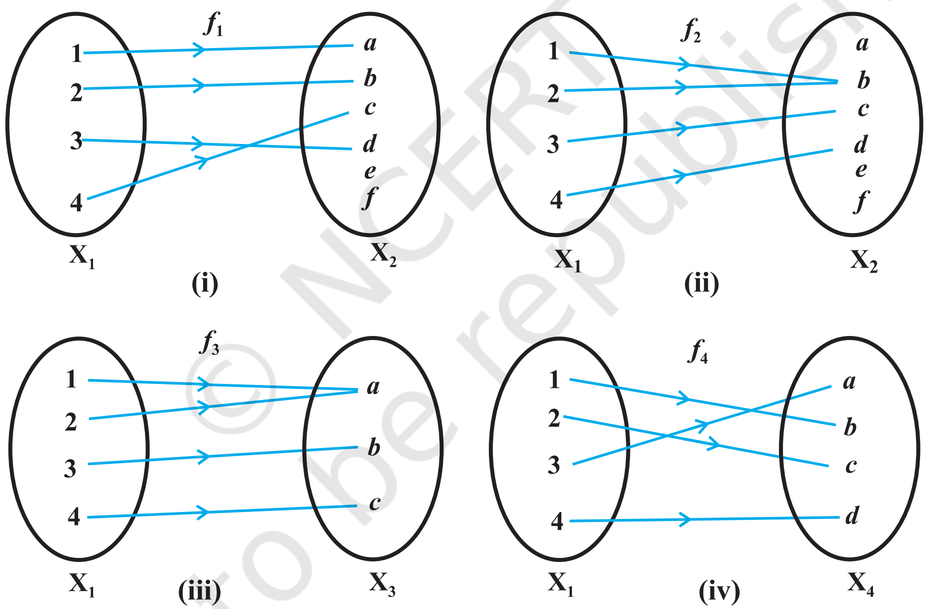
تعریف 5 تفاعلات $f : X \to Y$ یک۔یک (یا داخلی) کہا جاتا ہے، اگر x کے مختلف عناصر کی شبیہ جو کہ f کے زیرِ سایہ مختلف ہیں، یعنی ہر ایک $x_1, x_2 \in X$ کے لئے $f(x_1) = f(x_2)$ کا مطلب ہے $x_1 = x_2$ ورنہ f بہت سے ایک

(Many-one) کہلاتا ہے۔

شکل 1.2(i) اور (ii) میں تفاعل f_1 اور f_4 یک۔ یک اور تفاعل f_2 اور f_3 شکل 1.2(iii) اور (iii) میں بہت سے۔ ایک ہیں۔

تعریف 6 ایک تفاعل $f : X \rightarrow Y$ f کو اون ٹو کہا جاتا ہے، اگر y کا ہر عنصر کی پر چھائی x کا کوئی عنصر ہے f کے ماتحت، یعنی ہر ایک $y \in Y$ کے لئے x میں ایک عنصر X اس طرح موجود ہے کہ $f(x) = y$ ہو۔

شکل 1.2(iii)، (iv) میں تفاعل f_3 اور f_4 اون ٹو ہیں اور فنکشن f_1 شکل (i) 1.2 میں اون ٹو نہیں ہے کیونکہ عناصر e، f_1 کے زیر سایہ f، X_2 میں X_1 کے عناصر کی پر چھائی نہیں ہے۔



شکل 1.2(i) سے (iv)

ریمارک تفاعل $f : X \rightarrow Y$ اون ٹو ہے اگر اور صرف اگر f کی وسعت $= Y$ ہے

مثال 7 مان لیجئے ایک اسکول کی دسویں جماعت کے 50 طلباء کی تعداد کا سیٹ A ہے۔ مان لیجئے $f : A \rightarrow N$ ایک تفاعل ہے جو کہ $f(x) = x$، طلباء کے رول نمبر ہیں۔ دکھایئے کہ f ایک۔ایک ہے نہ کہ بر۔

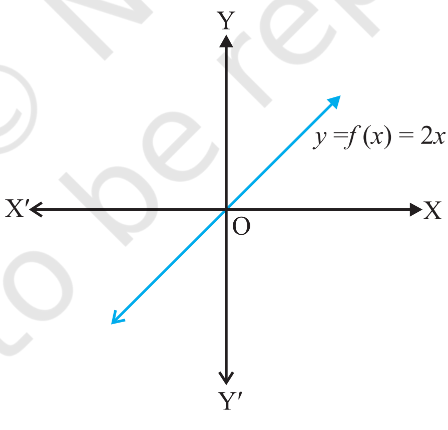
حل کلاس کے دو طلباء کا رول نمبر ایک نہیں ہوسکتا۔ اس لیے f، کو ایک–ایک ہونا ہی ہے۔ ہم بغیر وقت برباد کئے یہ مان سکتے ہیں کہ طلباء کے رول نمبر 1 تا 50 ہیں۔ اس کا مطلب ہے N میں 51 کلاس کے کسی بھی طلباء کا رول نمبر نہیں ہے، اس لئے f کے ماتحت X, 51 کے کسی بھی عنصر کی پرچھائی نہیں ہے۔ اس کا مطلب ہے f، اون ٹو نہیں ہے۔

مثال 8 دکھایئے کہ تفاعل $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ جو کہ $f(x) = 2x$ ہے، یک–یک ہے لیکن اون ٹو نہیں ہے۔

حل تفاعل f، یک–یک ہے، $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ کے لیے۔ اس کے آگے، f اون ٹو نہیں ہے، کیونکہ $1 \in \mathbf{N}$ کے لیے N میں کوئی بھی ایسا x نہیں ہے تاکہ $f(x) = 2x = 1$ ہو۔

مثال 9 ثابت کیجیے کہ تفاعل $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ جو کہ $f(x) = 2x$ ہے، یک–یک اور اون ٹو ہے۔

حل f ایک–ایک ہے، کیونکہ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ ہے ساتھ ہی، اگر کوئی حقیقی عدد y، R میں دیا گیا ہے، R میں $\frac{y}{2}$ موجود ہے تاکہ $f(\frac{y}{2}) = 2 \cdot (\frac{y}{2}) = y$۔ اس لئے، f اون ٹو ہے۔

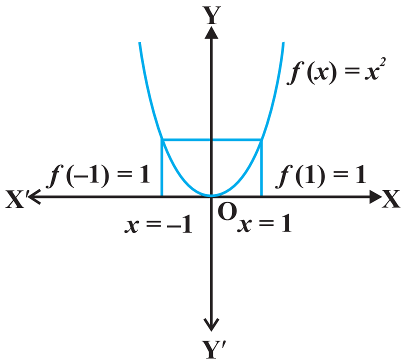


شکل 1.3

مثال 10 دکھایئے کہ تفاعل $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ جو کہ $f(1) = f(2) = 1$ اور $f(x) = x - 1$ ہر ایک $x > 2$ کے لیے، سے دیا گیا ہے اون ٹو ہے لیکن یک – یک نہیں ہے۔

حل f، یک – یک نہیں ہے، کیونکہ $f(1) = f(2) = 1$ ہے۔ لیکن f اون ٹو ہے، کیونکہ $y \in \mathbf{N}, y \neq 1$ دیا گیا ہے، ہم ایک x چن سکتے ہیں $y+1$ کی جگہ تا کہ $f(y+1) = y+1-1 = y$ ہے ساتھ ہی $1 \in \mathbf{N}$ کے لیے، ہمارے پاس ہے $f(1) = 1$ ۔

مثال 11 دکھائیے کہ تفاعل $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ جو کہ $f(x) = x^2$ سے بیان کیا گیا ہے نہ تو یک – یک ہے اور نہ ہی بر۔



The image of 1 and –1 under f is 1.

شکل 1.4

حل کیونکہ $f(-1) = 1 = f(1)$، اس لیے f یک – یک نہیں ہے۔ ساتھ ہی، عنصر 2– ہم علاقہ **R** میں علاقہ **R** کے کسی بھی عنصر کا عکس نہیں ہے (کیوں؟)

اس لیے کہ f اون ٹو نہیں ہے۔

مثال 12 دکھائیے کہ $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$، جو کہ دیا گیا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{اگر } x \text{ طاق ہے} \\ x-1 & \text{اگر } x \text{ جفت ہے} \end{cases}$$

دونوں یک – یک اور اون ٹو ہے

حل مان لیجیے کہ $f(x_1) = f(x_2)$ ہے۔ یہ نوٹ کر لیجیے کہ اگر x_1 طاق ہے اور x_2 مثبت ہے، تب ہمارے پاس ہوگا $x_1 + 1 = x_2 - 1$ یعنی $x_2 - x_1 = 2$ جو کہ ناممکن ہے۔ اسی طرح x_1 کا جفت ہونا اور x_2 کا طاق ہونے کی ممکنات کو بھی نظر انداز کیا جا سکتا ہے، اسی طرح کی دلیل کا استعمال کر کے۔ اس لیے دونوں x_1 اور x_2 یا تو جفت یا طاق ہونے چاہئیں۔

مان لیجیے دونوں x_1 اور x_2 طاق ہیں۔ تب $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ اسی طرح، اگر دونوں x_1 اور x_2 جفت ہیں، تب بھی $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$

اس طرح f، ایک–ایک ہے۔ ساتھ ہی، کوئی بھی طاق $2r+1$ ہم علاقہ N میں $2r+2$ کا عکس ہے اور کسی بھی مثبت عدد $2r$ کا ہم علاقہ N میں علاقہ N میں $2r-1$ کا عکس ہے اس طرح f، اون ٹو ہے۔

مثال 13 دکھائیے کہ ایک اون ٹو تفاعل $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ ہمیشہ یک – یک ہے۔

حل مان لیجے f، یک – یک نہیں ہے تب علاقہ میں دو عناصر مثال کے طور پر 1، اور 2، موجود ہیں جس کا عکس ہم علاقہ میں وہی

ہے۔ ساتھ ہی f، کے زیر سایہ 3 کا عکس صرف ایک عنصر ہوسکتا ہے۔ اس لیے وسعت سیٹ کے زیادہ سے زیادہ ہم علاقہ $\{1,2,3\}$ میں دو عناصر ہوسکتے ہیں، جو یہ دکھا رہا ہے کہ f، اون ٹو نہیں ہے، ایک تعاد ہے۔ اس لئے f، یک – یک ہونا ہی چاہئے۔

مثال 14 دکھایئے کہ یک یک – یک تفاعل $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2,3\}$ بر ہونا ہی چاہئے۔

حل کیونکہ f، یک – یک ہے، اس لئے f کے زیرِ سایہ ہم علاقہ $\{1,2,3\}$ میں 3 مختلف عناصر ایک ساتھ لینے چاہئے۔ اس لئے f، کو اون ٹو ہونا ہی ہے۔

ریمارک مثال 13 اور 14 میں دکھائے گئے اختیار محدود سیٹ کے نتائج بھی صحیح ہیں، یعنی۔، ایک یک – یک تفاعل $f : X \to X$ ضروری ہے کہ اون ٹو ہو اور ایک اون ٹو نقشہ $f : X \to X$ ضروری ہے کہ یک – یک ہو، کسی بھی محدود سیٹ کے لئے۔ اس کے برعکس، مثالیں 8 اور 10 دکھاتی ہیں کہ لامحدود سیٹ کے لئے، یہ صحیح نہیں ہوسکتا۔ حقیقت میں، یہ محدود سیٹ اور لامحدود سیٹ کے بیچ میں ایک کرداری فرق ہے۔

مشق 1.2

1۔ دکھایئے کہ فنکشن $f : \mathbf{R}_* \to \mathbf{R}$ جو کہ $f(x) = \frac{1}{x}$ سے بیان کیا گیا ہے یک – یک اور بر ہے، جہاں $\mathbf{R}$ غیر صفر حقیقی اعداد کا سیٹ ہے۔ کیا نتیجہ صحیح ہے، اگر علاقہ $\mathbf{R}_*$ کو N سے بدلا گیا ہو اور ہم علاقہ وہی ہو جو $\mathbf{R}_*$ میں ہے؟

2۔ ذیل فنکشن کی داخلی اور اون ٹو کی جانچ کیجیے:

(i) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ جو کہ $f(x) = x^2$ دیا گیا ہے

(ii) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ جو کہ $f(x) = x^2$ دیا گیا ہے

(iii) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ جو کہ $f(x) = x^2$ دیا گیا ہے

(iv) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ جو کہ $f(x) = x^3$ دیا گیا ہے

(v) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ جو کہ $f(x) = x^3$ دیا گیا ہے

3۔ ثابت کیجئے کہ عظیم صحیح عدد فنکشن $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ جو کہ $f(x)=[x]$ سے دیا گیا ہے نہ تو یک – یک ہے اور نہ ہی اون ٹو، جہاں $[x]$ عظیم صحیح عدد کو ظاہر کرتا ہے جو کہ x کے چھوٹا ہے یا برابر ہے۔

4۔ دکھائیے کہ مقیاس فنکشن $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ جو کہ $f(x)=|x|$ دیا گیا ہے، نہ تو یک- یک ہے اور نہ ہی اون ٹو جہاں $|x|$ ہے، اگر x مثبت یا 0 ہے اور $|x|$، $-x$ ہے، اگر x منفی ہے۔

5۔ دکھائیے کہ سگنم تفاعل $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ جو کہ

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{اگر } x>0\\ 0, & \text{اگر } x=0\\ -1, & \text{اگر } x<0\end{cases}$$

سے دیا گیا ہے نہ تو یک- یک ہے اور نہ ہی بر

6۔ مان لیجئے $A=\{1,2,3\}$، $B=\{4,5,6,7\}$ اور $f=\{(1,4),(2,5),(3,6)\}$۔ A سے B کی طرف ایک تفاعل ہے۔ دکھائیے کہ f یک- یک ہے۔

7۔ مندرجہ ذیل ہر ایک کیس میں، بیان کیجئے کہ کیا تفاعل یک- یک ہے، اون ٹو ہے یا دوقسمی۔ اپنے جواب کی دلیل دیجیے۔

(i) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ جو کہ $f(x)=3-4x$ سے بیان کیا گیا ہے

(ii) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ جو کہ $f(x)=1+x^2$ سے بیان کیا گیا ہے۔

8۔ مان لیجئے A اور B دو سیٹ ہیں۔ دکھائیے کہ $f:A\times B\to B\times A$ تا کہ $f(a,b)=(b,a)$ ایک دوقسمی تفاعل ہے۔

9۔ مان لیجئے $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ جو کہ

$$\begin{cases}\dfrac{n+1}{2} & \text{اگر } n \text{ طاق ہے}\\[2mm] \dfrac{n}{2} & \text{اگر } n \text{ جفت ہے}\end{cases}$$

$n\in \mathrm{N}$ سے بیان کیا گیا ہے

بیان کیجیے کہ کیا تفاعل f دوقسمی ہے۔ اپنے جواب کی وضاحت دیجئے۔

10۔ مان لیجئے $A=\mathbf{R}-\{3\}$ اور $B=\mathbf{R}-\{1\}$ ہے تفاعل $f:A\to B$ پر غور کیجیے جو کہ $f(x)=\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)$ سے بیان کیا گیا ہے۔ کیا f یک- یک ہے؟ اپنے جواب کی وضاحت کیجیے۔

11۔ مان لیجئے $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ جو کہ $f(x)=x^4$ سے بیان کیا گیا ہے۔ صحیح جواب چنیے۔

(A) f یک- یک اون ٹو ہے
(B) f بہت سے- ایک اون ٹو ہے
(C) f یک- یک ہے نہ کہ اون ٹو
(D) f نہ تو یک- یک ہے اور نہ ہی اون ٹو

12۔ مان لیجئے $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ جو کہ $f(x) = 3x$ سے بیان کیا گیا ہے صحیح جواب چنیے ۔

(A) f یک – یک اون ٹو ہے　　(B) f بہت سے – ایک اون ٹو ہے

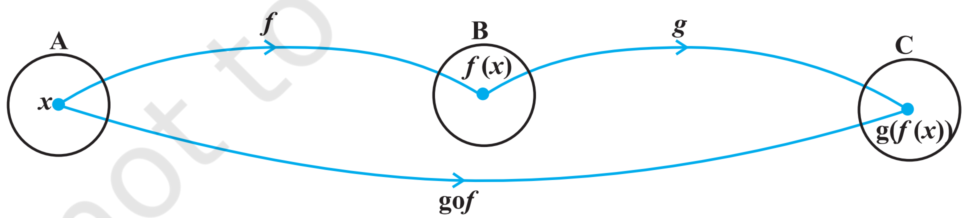
(C) f یک – یک ہے نہ کہ اون ٹو　　(D) f نہ تو یک – یک ہے اور نہ ہی اون ٹو

1.4 تفاعل کی ترکیب اور قابلِ تعکیس تفاعل

اس حصہ میں ہم تفاعل کی بناوٹ اور دو قسمی تفاعل کے معکوس کا مطالعہ کریں گے۔ ان تمام طلباء کے سیٹ A پر غور کیجیے جو دسویں جماعت میں 2006 میں بورڈ کے امتحان میں بیٹھے تھے۔ ہر طالب علم جو بورڈ کے امتحان میں بیٹھ رہا ہے اسے بورڈ نے ایک رول نمبر دیا ہے جو کہ ہر ایک طالب علم نے اپنی جواب کی کاپی میں امتحان کے وقت لکھا ہے۔ راز داری کے لیے بورڈ نے طلباء کے رول نمبروں کی شکل بدل کر انہیں از سر نو ان کی جواب کی کاپی میں ایک فرضی کوڈ نمبر ایک رول نمبر کے لیے لکھ دیا۔ مان لیجیے $\mathrm{B} \subset \mathbf{N}$ تمام رول نمبروں کا سیٹ ہے اور $\mathrm{C} \subset \mathbf{N}$ تمام کوڈ نمبروں کا سیٹ ہے یہ دو فنکشن $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ اور $g : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ کو وجود دیتا ہے جو کہ $f(a)$ وہ رول نمبر ہے جو طالب علم a کو فراہم کیا گیا ہے اور $g(b)$ وہ کوڈ نمبر ہے جو رول نمبر b کو فراہم کیا گیا ہے۔ اس طرح تفاعل f کے ذریعے ہر طالب علم کو ایک رول نمبر فراہم کیا گیا ہے اور ہر رول نمبر کو تفاعل g کے ذریعہ ایک کوڈ فراہم کیا گیا ہے۔ اس طرح، ان دونوں تفاعل کے مجموعہ سے ہر ایک طالب علم ایک کوڈ نمبر کے ساتھ جڑ گیا ہے۔

تعریف 8 مان لیجیے $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ اور $g : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ دو تفاعل ہیں۔ تب f اور g کی بناوٹ، جو کہ gof سے ظاہر کی گئی ہے ایک تفاعل کی طرح بیان کی گئی ہے $gof : \mathrm{A} \to \mathrm{C}$ جو کہ دیا گیا ہے۔

$$gof(x) = g(f(x)),\ \forall\ x \in \mathrm{A}.$$



شکل 1.5

مثال 15 مان لیجیے $f : \{2,3,4,5\} \to \{3,4,5,9\}$ اور $g : \{3,4,5,9\} \to \{7,11,15\}$ تفاعل ہیں جو کہ $f(2)=3$

$f(3)=4, f(4)=f(5)=5$ اور $g(3)=g(4)=7$ اور $g(5)=g(9)=11$ ہیں۔ gof دریافت کیجیے۔

حل ہمارے پاس ہے

$gof(2)=g(f(2))=g(3)=7$, $gof(3)=g(f(3))=g(4)=7$, $gof(4)=g(f(4))=g(5)=11$ اور

$gof(5)=g(5)=11$

مثال 16 gof اور fog دریافت کیجیے، اگر $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ اور $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ جو کہ دیے گئے ہیں $f(x)=\cos x$ اور $g(x)=3x^2$ سے۔ دکھائیے کہ $gof\neq fog$ ہے۔

حل ہمارے پاس ہے $gof(x)=g(f(x))=g(\cos x)=3(\cos x)^2=3\cos^2 x$ اسی طرح $fog(x)=f(g(x))=f(3x^2)=\cos(3x^2)$ نوٹ کیجیے کہ $3\cos^2 x\neq\cos 3x^2$ ہے $x=0$ کے لیے اس طرح $gof\neq fog$۔

مثال 17 دکھائیے کہ اگر $f:\mathbf{R}-\left\{\frac{7}{5}\right\}\to\mathbf{R}-\left\{\frac{3}{5}\right\}$ ہے جو کہ $f(x)=\frac{3x+4}{5x-7}$ سے بیان کیا گیا ہے۔ اور $g:\mathbf{R}-\left\{\frac{3}{5}\right\}\to\mathbf{R}-\left\{\frac{7}{5}\right\}$ جو کہ $g(x)=\frac{7x+4}{5x-3}$ سے بیان کیا گیا ہے، تب $fog=I_A$ اور $gof=I_B$ ہے، جہاں، $A=\mathbf{R}-\left\{\frac{3}{5}\right\}$ اور $B=\mathbf{R}-\left\{\frac{7}{5}\right\}$ ہے؛ $I_A(x)=x,\forall x\in A, I_B(x)=x,\forall x\in B$ بالترتیب سیٹ A اور B پر تماثلی تفاعل کہلاتے ہیں۔

حل ہمارے پاس ہے

$$gof(x)=g\left(\frac{3x+4}{5x-7}\right)=\frac{7\left(\frac{(3x+4)}{(5x-7)}\right)+4}{5\left(\frac{(3x+4)}{(5x-7)}\right)-3}=\frac{21x+28+20x-28}{15x+20-15x+21}=\frac{41x}{41}=x$$

اسی طرح
$$fog(x)=f\left(\frac{7x+4}{5x-3}\right)=\frac{3\left(\frac{(7x+4)}{(5x-3)}\right)+4}{5\left(\frac{(7x+4)}{(5x-3)}\right)-7}=\frac{21x+12+20x-12}{35x+20-35x+21}=\frac{41x}{41}=x$$

اس طرح $gof(x) = x, \forall x \in B$ اور $fog(x) = x, \forall x \in A$ ہے جس کا مطلب ہے $gof = I_B$ اور $fog = I_A$ ۔

مثال 18 دکھائیے کہ اگر $f : A \to B$ اور $g : B \to C$ یک – یک ہیں، تب $gof : A \to C$ بھی یک – یک ہے۔

حل مان لیجئے $gof(x_1) = gof(x_2)$

$$\Rightarrow \quad g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

$$\Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$$ کیونکہ g یک – یک ہے

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2$$ کیونکہ f یک – یک ہے

اس لئے، gof، یک – یک ہے

مثال 19 دکھائیے کہ اگر $f : A \to B$ اور $g : B \to C$ اون ٹو ہیں، تب $gof : A \to C$ بھی اون ٹو ہے۔

حل ایک اختیاری عنصر $z \in C$ دیا گیا ہے g کے زیرِ سایہ Z کا پہلے کا عکس y موجود ہے تا کہ $g(y) = Z$، کیونکہ g بر ہے۔ اس کے آگے، $y \in B$ کے لئے A میں x ایک عنصر موجود ہے $f(x) = y$ کے ساتھ، کیونکہ f بر ہے۔ اس لئے $gof(x) = g(f(x)) = g(y) = Z$ ہے، جو کہ دکھاتا ہے کہ gof اون ٹو ہے۔

مثال 20 فنکشن f اور g پر غور کیجیے تا کہ gof کی بناوٹ بیان کی جاسکے اور یک – یک ہو۔ کیا f اور g دونوں لازمی طور پر یک – یک ہیں؟

حل $\{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ پر غور کیجیے جو کہ $f(x) = x, \forall x$ کے لئے بیان کیا گیا ہے اور $g : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ کیونکہ $g(x)=x$ ہے تمام $x=1,2,3,4$ کے لئے اور $g(5)=g(6)=5$ تب $gof(x) = x \ \forall\ x$ ہے جو دکھاتا ہے کہ gof، یک – یک ہے۔ لیکن صاف طور پر، g، یک – یک نہیں ہے؟

مثال 21 کیا دونوں فنکشن f اور g لازمی طور پر اون ٹو ہیں، اگر gof، اون ٹو ہے؟

حل $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ اور $g : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3\}$ پر غور کیجیے جو کہ f، $f(1)=1, f(2)=2, f(3)=f(4)=3, g(1)=1, g(2)=2$ اور $g(3)=g(4)=3$ سے بیان کئے گئے ہیں۔ یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ gof اون ٹو

ہے لیکن f اون ٹو نہیں ہے۔

ریمارک عام طور پر یہ جانچ کی جاسکتی ہے کہ gof، یک – یک ہونے کا مطلب ہے f، یک – یک ہے اسی طرح، gof، اون ٹو ہے کا مطلب ہے g اون ٹو ہے۔

اب ہم، بورڈ امتحانات کے حوالے سے اس سیکشن (حصہ) کے آغاز میں جو تفاعل f اور g بیان کئے گئے ہیں ان پر نظر رکھیں گے۔ بورڈ کے دسویں جماعت کے امتحان پر بیٹھنے والے طلباء کا فنکشن f کے زیرِ سایہ ایک رول نمبر دیا گیا ہے g تفاعل کے زیرِ سایہ ہر رول نمبر کو ایک کوڈ دیا گیا ہے جو بات کی کابیوں کے جانچنے کے بعد نمبروں کی لسٹ میں جانچنے والا ہر کوڈ نمبر کے سامنے نمبر چڑھاتا ہے اور اسے بورڈ کے دفتر میں جمع کر دیتا ہے۔ بورڈ کے افسران اسے ڈی۔ کوڈ کرتے ہیں ہر ایک کوڈ نمبر کو ایک رول نمبر فراہم کرتے ہیں ایک طریقے سے جو اسے الٹا g کی طرف لے جاتا ہے اور اس طرح کوڈ نمبر کی بجائے نمبر، رول نمبروں کے ساتھ جڑ جاتے ہیں۔ اس کے آگے، طریقہ دوبارہ f کی طرف پلٹ جاتا ہے جو کہ رول نمبر کو اس رول نمبر سے ملاتا ہے۔ یہ ہماری مدد طلباء کو وہ نمبر دلانے میں کرتا ہے جو انھوں نے حاصل کئے ہیں۔ ہم اس بات کا مشاہدہ کرتے ہیں کہ gof کو حاصل کرنے کے لئے جب ہم f اور g کے ترکیب اجزائی کرتے ہیں، پہلے f اور پھر g کو لئے ہیں، جب کہ الٹے طریقے میں gof ترکیب اجزائی کرنے کے لئے پہلے ہم g کا الٹا لیتے ہیں اور پھر f، کا الٹا طریقہ۔

مثال 22 مان لیجئے $f: \{1,2,3\} \rightarrow \{a,b,c\}$ یک – یک اور اون ٹو تفاعل ہے جو کہ $f(1)=a$, $f(2)=b$ اور $f(3)=c$ سے دیا گیا ہے۔ دکھایئے کہ ایک ایسا تفاعل موجود ہے $g: \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ تا کہ $gof = I_X$ اور $fog = I_Y$ جہاں، $X = \{1, 2, 3\}$ اور $Y = \{a, b, c\}$ ہے۔

حل $g: \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ پر غور کیجیے کیونکہ $g(a) = 1$, $g(b) = 2$ اور $g(c) = 3$ ہے۔ یہ جانچ کرنا آسان ہے کہ غیر مفرد $gof = I_X$، تماثلی تفاعل X پر ہے اور غیر مفرد $fog = I_Y$ تماثلی تفاعل Y پر ہے۔

ریمارک دلچسپ حقیقت یہ ہے کہ اوپر مثال میں دیا گیا نتیجہ اختیاری یک – یک اور اون ٹو تفاعل $f: X \rightarrow Y$ کے لئے درست ہے۔ صرف یہ ہی نہیں اس کا برعکس بھی صحیح ہے، یعنی۔، اگر $f: X \rightarrow Y$ ایک تفاعل ہے تا کہ ایک تفاعل $g: Y \rightarrow X$ موجود ہے، تا کہ $gof = I_X$ اور $fog = I_Y$ ہے، تب f یک – یک اور اون ٹو ہوگا ہی۔

اوپر کا بحث و مباحثہ، مثال نمبر 22 اور ریمارک ذیل تعریف کی طرف لے جاتے ہیں:

تعریف 9 ایک تفاعل $f : X \to Y$ اس وقت قابلِ تعکیس بیان کیا جا سکتا ہے، اگر ایک تفاعل $g : Y \to X$ موجود ہے تا کہ $gof = I_X$ اور $fog = I_Y$ ہے تفاعل g، f کا معکوس کہلاتا ہے اور اس f^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس طرح اگر f تقلیبی ہے، تب f یک۔ یک اور بر ہونا چاہئے ۔ اور اس کے برعکس اگر f^{-1} یک۔ یک اور بر ہے، تب f تقلیبی ہونا چاہئے۔ یہ حقیقت ہماری صاف طور پر مدد کرتی ہے یہ ثابت کرنے میں کہ فنکشن f قابلِ تعکیس ہوگا یہ دکھانے سے کہ f، یک۔ یک اور اون ٹو ہے، خاص طور پر اس وقت جب f، کا اصل معکوس نہیں نکالنا ہو۔

مثال 23 مان لیجئے $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Y}$ ایک فنکشن ہے جو کہ $f(x) = 4x + 3$ سے بیان کیا گیا ہے، جہاں کسی $x \in N$ کے لئے $Y = \{y \in N : y = 4x + 3\}$۔ دکھایئے کہ f قابلِ تعکیس ہے۔ اس کا معکوس معلوم کیجیے۔

حل ایک اختیاری عنصر Y کے y پر غور کیجئے۔ Y کی تعریف سے، $y = 4x + 3$، ہے کسی بھی x کے لئے جو کہ علاقہ N میں ہے یہ دکھاتا ہے کہ $x = \frac{(y-3)}{4}$ ہے۔ $g : Y \to N$، $g(y) = \frac{(y-3)}{4}$ سے بیان کیجیے۔ اب

$$gof(x) = g(f(x)) = g(4x+3) = \frac{(4x+3-3)}{4} = x$$ ہے اور

$$fog(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{(y-3)}{4}\right) = \frac{4(y-3)}{4} + 3 = y - 3 + 3 = y$$ ہے۔ یہ دکھاتا ہے کہ

$gof = I_N$ اور $fog = I_Y$ ہے، جس کا مطلب ہے کہ f، قابلِ تعکیس ہے اور g، f کا معکوس ہے۔

مثال 24 مان لیجئے $Y = \{n^2 : n \in N\} \subset N$، $f : N \to Y$ پر غور کیجیے کیونکہ $f(n) = n^2$ ہے۔ دکھایئے کہ f تقلیبی ہے۔ f کا معکوس دریافت کیجیے۔

حل Y میں ایک اختیاری عنصر y ہے جو کہ n^2 کی شکل کا ہے، کسی $n \in N$ کے لئے۔ اس کا مطلب ہے کہ $n = \sqrt{y}$، یہ ایک تفاعل $g : Y \to N$ دیتا ہے جو کہ $g(y) = \sqrt{y}$ سے بیان کیا گیا ہے۔ اب

$$gof(n) = g(n2) = \sqrt{n^2} = n$$ اور $$fog(y) = f\left(\sqrt{y}\right) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$$ ہے، جو دکھاتا ہے کہ

$gof = I_N$ اور $fog = I_Y$۔ اس کا مطلب ہے۔ f قابلِ تعکیس ہے $f^{-1} = g$ کے ساتھ۔

مثال 25 مان لیجئے $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ ایک فنکشن ہے جو کہ $f(x) = 4x^2 + 12x + 15$ سے بیان کیا گیا ہے۔ دکھایئے

کہ $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{S}$ جہاں f,S کی وسعت ہے، قابلِ تعکیس ہے۔ f کا معکوس دریافت کیجیے۔

حل مان لیجیے f کی وسعت کا y ایک اختیاری عنصر ہے۔ تب $y = 4x^2 + 12x + 15$ ہے کسی بھی x کے لئے جو کہ N میں موجود ہے، اس کا مطلب یہ ہے کہ $y = (2x + 3)^2 + 6$ ۔ یہ دیتا ہے $x = \frac{\left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3\right)}{2}$ ، کیونکہ $y \geq 6$ سے۔

ہمیں $g : S \rightarrow \mathbf{N}$ کو $g(y) = \frac{\left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3\right)}{2}$ سے بیان کرنا چاہیے۔

اب $gof(x) = g(f(x)) = g(4x^2 + 12x + 15) = g((2x + 3)^2 + 6)$

$$= \frac{\left(\left(\sqrt{(2x+3)^2+6-6}\right)-3\right)}{2} = \frac{(2x+3-3)}{2} = x$$

اور $fog(y) = f\left(\frac{\left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3\right)}{2}\right) = \left(\frac{2\left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3\right)}{2}+3\right)^2 + 6$

$$= \left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3+3\right)^2 + 6 = \left(\sqrt{y-6}\right)^2 + 6 = y - 6 + 6 = y$$

اس لئے $gof = I_N$ اور $fog = I_S$ ہے۔ اس سے یہ نکلتا ہے کہ f تقلیبی ہے $g = f^{-1}$ کے ساتھ۔

مثال 26 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ اور $h: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ پر غور کیجیے، جو کہ $f(x) = 2x, g(y) = 3y + 4$ اور $h(z) = \sin z, \forall x, y$ اور Z جو کہ N میں موجود ہیں کے لئے بیان کیا گیا ہے۔ دکھائیے کہ $ho(gof) = (hog)of$ ہے۔

حل ہمارے پاس ہے

$$ho(gof)(x) = h(gof(x)) = h(g(f(x))) = h(g(2x))$$

$$= h(3(2x) + 4) = h(6x + 4) = \sin(6x + 4) \; \forall \; x \in \mathbf{N}.$$

ساتھ ہی $((hog)of)(x) = (hog)(f(x)) = (hog)(2x) = h(g(2x))$

$$= h(3(2x) + 4) = h(6x + 4) = \sin(6x + 4), \forall \in \mathbf{N}$$

یہ دکھاتا ہے کہ $ho(gof) = (hog)of$

یہ نتیجہ عام حالات کے لئے بھی صحیح ہے۔

مسئلہ 1 $f: X \to Y, g: Y \to Z$ اور $h: Z \to S$ تفاعل ہیں، تب

$$ho(gof) = (hog)of.$$

ثبوت ہمارے پاس ہے

$$ho(gof)(x) = h(gof(x)) = h(g(f(x))), \forall$$ X میں x کے لئے

اور $$(hog)of\ (x) = hog(f(x)) = h(g(f(x))), \forall$$ X میں x کے لئے

اس طرح $$ho(gof) = (hog)of.$$

مثال 27 $f: \{1,2,3\} \to \{a,b,c\}$ اور $g: \{a,b,c\} \to$ {سیب، گیند، بلی} پر غور کیجیے جو کہ $f(1)=a, f(2)=b,$ $f(3)=c,$ $g(a)=$سیب، $g(b)=$گیند، $g(c)=$بلی، میں دکھایئے کہ f, g، اور gof قابلِ تعکیس ہیں۔ f^{-1}, g^{-1} اور $(gof)^{-1}$ دریافت کیجئے اور دکھایئے کہ $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ ہے۔

حل تعریف سے یہ نوٹ کر لیجیے کہ f اور g دو قسمی تفاعل ہیں۔ مان لیجئے کہ $f^{-1}: \{a,b,c\} \to (1, 2, 3\}$ اور g^{-1}، {سیب، گیند، بلی} $\to \{a,b,c\}$ ہیں جو کہ $f^{-1}\{a\} = 1, f^{-1}\{b\} = 2, f^{-1}\{c\} = 3,$ ، g^{-1} {سیب} $= a$ ، g^{-1} {گیند} $= b$ ، اور g^{-1} {بلی} $= c$ سے ظاہر کئے گئے ہیں۔ یہ تصدیق کرنا آسان ہے کہ $f^{-1}of = I_{\{1, 2, 3\}}$، $fo\,f^{-1} = I_{\{a,b,c\}}$، $g^{-1}og = I_{\{a,b,c\}}$ اور $go\,g^{-1} = I_D$ ہیں۔ جہاں D = {سیب، گیند، بلی} ہے۔ اب $gof: \{1, 2, 3\} \to$ {سیب، گیند، بلی} دیا گیا ہے سیب = $gof(1)$، گیند $gof(2)$ = ، بلی = $gof(3)$، ہم اسے اس طرح بیان کر سکتے ہیں۔

$(gof)^{-1}$ {سیب، گیند، بلی} $\to \{1, 2, 3\}$ بذریعہ $(gof)^{-1}$ (سیب) $= 1$، $(gof)^{-1}$ (گیند) $= 2$ اور $(gof)^{-1}$ (بلی) $= 2$ ہے۔ یہ دیکھنا آسان ہے کہ $(gof)^{-1} o (gof) = I_{\{1, 2, 3\}}$ اور $(gof) o (gof)^{-1} = I_D$ اس طرح ہم نے دیکھا کہ f, g اور $g\ of$ تقلیبی ہیں۔

اب، $f^{-1}og^{-1}$ (سیب) $= f^{-1}(g^{-1}$ (سیب) $= f^{-1}(a) = 1 = (gof)^{-1}$ (سیب)

$f^{-1}og^{-1}$ (گیند) $= f^{-1}(g^{-1}$ (گیند) $= f^{-1}(b) = 2 = (gof)^{-1}$ (گیند) اور

$f^{-1}og^{-1}$ (بلی) $= f^{-1}(g^{-1}$ (بلی)$) = f^{-1}(c) = 3 = (gof)^{-1}$ (بلی)۔

اس طرح $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.

اوپر دیا ہوا نتیجہ عام حالات میں بھی درست ہے۔

مسئلہ 7 مان لیجئے $f: X \to Y$ اور $g: Y \to Z$ دو قابلِ تعکیس تفاعل ہیں۔ تب gof بھی قابلِ تعکیس تفاعل ہے $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ کے ساتھ۔

ثبوت یہ دکھانے کے لئے کہ gof قابلِ تعکیس ہے $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ کے ساتھ، یہ دکھانا کافی ہے کہ $(f^{-1}og^{-1})o(gof) = I_X$ اور $(gof)o(f^{-1}og^{-1}) = I_Z$ ہے۔

اب $(f^{-1}og^{-1})o(gof) = ((f^{-1}og^{-1})\, og)\, of$ مسئلہ 1، سے

$= (f^{-1}o(g^{-1}og))\, of$ مسئلہ 1، سے

$= (f^{-1}oI_Y)\, of$، $g^{-1} = I_X$ کی تعریف سے

اسی طرح، یہ بھی دکھایا جاسکتا ہے کہ $(gof)o(f^{-1}og^{-1}) = I_Z$. ہے۔

مثال 28 مان لیجئے $S = \{1, 2, 3\}$ ہے یہ نکالئے کہ کیا تفاعل $f: S \to S$ جو ذیل طرح سے بیان کیا گیا ہے کے معکوس موجود ہیں۔ f^{-1} دریافت کیجئے، اگر یہ موجود ہے۔

(a) $f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

(b) $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1)\}$

(c) $f = \{(1, 3), (3, 2), (2, 1)\}$

حل

(a) یہ دیکھنا آسان ہے کہ f، یک۔ یک اور بر ہے، تا کہ f کے دئے ہوئے معکوس f^{-1} کے ساتھ f، قابلِ تعکیس ہے جو کہ دیا گیا ہے $f^{-1} = \{(1,1), (2, 2), (3, 3)\} = f$ ۔

(b) کیونکہ $f(2) = f(3) = 1$، f جو، یک۔ یک نہیں ہے، اس لئے کہ f قابلِ تعکیس نہیں ہے۔

(c) یہ دیکھنا آسان ہے کہ f، یک۔ یک اور بر ہے، اس طرح کہ f، $f^{-1} = \{(3,1), (2, 3), (1, 2)\}$ کے ساتھ قابلِ تعکیس ہو۔

مشق 1.3

1۔ مان لیجیے $f: \{1, 3, 4\} \to \{1, 2, 5\}$ اور $g: \{1, 2, 5\} \to \{1, 3\}$ دیئے گئے ہیں
$f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$ اور $g = \{(1, 3), (2, 3), (5, 1)\}$ سے gof لکھیے۔

2۔ مان لیجیے f, g اور h، R سے R میں تفاعلات کے ہیں۔ دکھایئے کہ

$$(f + g)oh = foh + goh$$
$$(f \cdot g)oh = (foh) \cdot (goh)$$

3۔ gof اور fog دریافت کیجیے، اگر

(i) $f(x) = |x|$ اور $g(x) = |5x - 2|$

(ii) $f(x) = 8x^3$ اور $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$

4۔ اگر $x \neq \frac{2}{3}$، $f(x) = \frac{(4x+3)}{(6x-4)}$ ، دکھایئے کہ $fof(x) = x$ ہے، تمام $x \neq \frac{2}{3}$ کے لیے f کا معکوس کیا ہے؟

5۔ وجوہات کے ساتھ بیان کیجیے کہ کیا ذیل تفاعلات کے معکوس ہیں۔

(i) $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{10\}$ کے ساتھ
$f = \{(1,10), (2,10), (3,10), (4,10)\}$

(ii) $g: \{5, 6, 7, 8\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ کے ساتھ
$g = \{(5, 4), (6, 3), (7, 4), (8, 2)\}$

(ii) $h: \{2, 3, 4, 5\} \to \{7, 9, 11, 13\}$
$h = \{(2, 7), (3, 9), (4, 11), (5, 13)\}$

6۔ دکھایئے کہ $f: [-1,1] \to \mathbf{R}$ جو کہ $f(x) = \frac{x}{(x+2)}$ سے دیا گیا ہے یک۔ یک ہے۔ فنکشن
$f: [-1,1] \to$ سمت f کا معکوس دریافت کیجیے۔

(اشارہ۔ کسی بھی f، کی وسعت $y \in$ کے لیے $f, y = f(x) = \frac{x}{x+2}$ کسی بھی x کے لیے جو کہ [-1,1]

میں موجود ہے،یعنی۔، $x = \dfrac{2y}{(1-y)}$

7۔ تفاعل $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ پر غور کیجیے جو کہ $f(x)=4x+3$ سے دیا گیا ہے۔دکھایئے کہ f قابلِ تعکیس ہے۔f کا معکوس دریافت کیجیے۔

8۔ تفاعل $f: \mathbf{R}_+ \to [4, \infty)$ پر غور کیجیے جو کہ $f(x) = x^2 + 4$ سے دیا گیا ہے۔دکھایئے کہ f قابلِ تعکیس ہے معکوس f^{-1} کے ساتھ جو کہ دیا گیا ہے $f^{-1}(y) = \sqrt{y-4}$ سے، جہاں $\mathbf{R}_+$ تمام غیر منفی حقیقی اعداد کا سیٹ ہے۔

9۔ تفاعل $f: \mathbf{R}_+ \to [-5, \infty)$ پر غور کیجیے جو کہ $f(x) = 9x^2 + 6x - 5$ سے دیا گیا ہے۔ دکھایئے کہ $f^{-1}(y) = \left(\dfrac{\left(\sqrt{y+6}\right)-1}{3}\right)$ کے ساتھ قابلِ تعکیس ہے۔

10۔ مان لیجیے $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ ایک قابلِ تعکیس تفاعل ہے۔دکھایئے کہ f کا معکوس اکلوتا ہے۔

(اشارہ–مان لیجیے g_1 اور g_2، f کے دو معکوس ہیں۔تب $y \in \mathrm{Y}, fog_1(y) = 1_{\mathrm{Y}}(y) = fog_2(y)$، f کی یک–یک خصوصیت کا استعمال کر کے)

11۔ $f: \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ پر غور کیجیے جو کہ $f(1) = a$, $f(2) = b$ اور $f(3) = c$ سے دیئے گئے ہیں دریافت کیجیے اور دکھایئے کہ $(f^{-1})^{-1} = f$ ہے۔

12۔ مان لیجیے $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ ایک قابلِ تعکیس تفاعل ہے۔دکھایئے کہ f^{-1} معکوس f ہے، یعنی۔، $(f^{-1})^{-1} = f$۔

13۔ اگر $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ دیا گیا ہے $f(x) = (3-x^3)^{\frac{1}{3}}$ سے، تب $fof(x)$ ہے۔

(A) $x^{\frac{1}{3}}$ (B) x^3 (C) x (D) $(3-x^3)$.

14۔ مان لیجیے $f: \mathbf{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\} \to \mathbf{R}$ ایک تفاعل ہے جو کہ بیان کیا گیا ہے $f(x) = \dfrac{4x}{3x+4}$ سے f کا معکوس میپ g ہے: سمت $\to \mathbf{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$ f دیا گیا ہے۔

(A) $g(y) = \dfrac{3y}{3-4y}$ (B) $g(y) = \dfrac{4y}{4-3y}$

(C) $g(y) = \dfrac{4y}{3-4y}$ (D) $g(y) = \dfrac{3y}{4-3y}$

1.5 دوعنصری عمل

اسکولی زندگی میں آپ کے سامنے چار بنیادی عمل جمع ،تفریق ضرب اور تقسیم آئے ہیں ان عملوں کا اصل مقصد ہے کہ دیئے ہوئے کن ہی دونمبروں a اور b کے لیے ۔ ہم ایک دوسرا نمبر $a+b$ یا $a-b$ یا ab یا $\frac{a}{b}, b \neq 0$ رفیق بنا لیتے ہیں ۔اس بات کو نوٹ کر لیجیے کہ صرف دو اعداد بیک وقت جوڑے یا ضرب کئے جا سکتے ہیں ۔ جب ہمیں تین اعداد کا مجموعہ معلوم کرنے کی ضرورت ہوگی، پہلے ہم دو اعداد کو جوڑیں گے اور تب ان کے مجموعہ کو تیسرے عدد کے ساتھ جوڑیں گے ۔اس طرح مجموعہ،ضرب،تفریق اور تقسیم دوعنصری عملیات کی مثالیں ہیں، کیونکہ(Binary) کا مطلب ہے دو اگر ہم ایک عام تعریف بیان کرنا چاہتے ہیں جو یہ چاروں عملیات کو ایک ساتھ لے،تب اعداد کے سیٹ کو ایک اختیاری سیٹ X سے بدلنا ہوگا اور تب عام دوعنصری عملیات اور کچھ نہیں ہیں بلکہ ضرب a,b اعداد کے کسی بھی جوڑے کے رفیق X کے ایک عنصر سے دوسرے X کے عنصر میں ہوں گے ۔ یہ ایک عام تعریف بیان کرتا ہے جو اس طرح دی گئی ہے ۔

تعریف 10 ایک دوعنصری عمل * ایک سیٹ A پر ایک تفاعل $^* : \mathrm{A} \times \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ ہے ۔ہم (a, b) * کو $a * b$ سے ظاہر کرتے ہیں ۔

مثال 29 دکھایئے کہ R پر جوڑ تفریق اور ضرب دوعنصری عملیات ہیں، لیکن R پر تقسیم ایک دوعنصری عمل نہیں ہے ۔مزید، دکھایئے کہ سیٹ $\mathbf{R}_*$ غیر صفر حقیقی اعداد پر تقسیم دوعنصری عمل ہے ۔

حل $+: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ کے ذریعے دیا گیا ہے ۔

$$(a, b) \to a + b$$

$-: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ کے ذریعے دیا گیا ہے ۔

$$(a, b) \to a - b$$

$\times: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ کے ذریعے دیا گیا ہے ۔

$$(a, b) \to ab$$

کیونکہ '–' ,'+' اور '×' تفاعل ہیں، وہ R پر دوعنصری عمل ہیں ۔

لیکن $\div: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ، $(a, b) \to \frac{a}{b}$ کے ذریعے دیا گیا، ایک تفاعل نہیں ہے اور اس لیے دوعنصری عمل نہیں ہے

کیونکہ $a = b$ کے لیے $\frac{a}{b}$ بیان نہیں کیا گیا ہے۔

حالانکہ $\div: \mathbf{R}_* \times \mathbf{R}_* \to \mathbf{R}_*$ ، جو کہ $(a, b) \to \frac{a}{b}$ کے ذریعے دیا گیا ایک تفاعل ہے اور اس لیے $\mathbf{R}_*$ پر دو عنصری عمل ہے۔

مثال 30 دکھایئے کہ تفریق اور تقسیم N پر دو عنصری عمل نہیں ہے۔

حل $-: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ جو کہ $(a,b) \to a-b$ سے دیا گیا ہے، ایک دو عنصری عمل نہیں ہے، کیونکہ (3,5) کا عکس '–' کے زیرِ سایہ $3-5 = -2 \in \mathbf{N}$ ہے۔اسی طرح $\div: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ جو کہ $(a, b) \to a \div b$ ایک دو عنصری عمل نہیں ہے، کیونکہ (3,5) کا عکس ÷ کے زیرِ سایہ $3\div 5 = \frac{3}{5} \in \mathbf{N}$ ہے۔

مثال 31 دکھایئے کہ $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ جو کہ $(a, b) \to a + 4b^2$ سے دکھایا گیا ہے ایک دو عنصری عمل ہے۔

حل کیونکہ * ہر جوڑے (a,b) کو واحد عنصر $a + 4b^2$ کو R میں لے جاتا ہے، * ,R میں ایک دو عنصری عمل ہے R پر۔

مثال 32 مان لیجئے P ایک دیئے ہوئے سیٹ X کے تمام ماتحت سیٹ کا سیٹ ہے۔دکھایئے کہ

$\cup : \mathrm{P} \times \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ جو کہ دیا گیا ہے۔ $(\mathrm{A, B}) \to \mathrm{A \cup B}$ ہے اور $\cap : \mathrm{P} \times \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ جو کہ دیا گیا ہے $(\mathrm{A, B}) \to \mathrm{A \cap B}$ سے سیٹ P پر دو عنصری عملیات ہیں۔

حل کیونکہ اجماع عمل ∪ کے ہر جوڑے (A, B) کو P × P میں ایک واحد عنصر A ∪ B ،P میں لے جاتا ہے۔ ∪ ,P پر ایک دو عنصری عمل ہے۔اسی طرح، تقاطع عمل ∩ ہر جوڑے (A,B)، P × P کے واحد عنصر A ∩ B کو P میں لے جاتا ہے، ∩,P پر ایک دو عنصری عمل ہے۔

مثال 33 دکھایئے کہ $\vee: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ جو کہ $(a, b) \to$ عظیم {a,b} سے دیا گیا ہے اور $\wedge: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ جو کہ $(a, b) \to$ صغیر سے دیا گیا ہے دو عنصری عمل ہے۔

حل کیونکہ ∨ ہر جوڑے (a,b) کو R × R میں واحد عنصر بنام a اور b کے عظیم کی طرف لے جاتا ہے جو کہ R میں موجود ہے، ∨ ایک دو عنصری عمل ہے۔اسی طرح کی دلیل کا استعمال کرے، کوئی بھی یہ کہہ سکتا ہے کہ ∧ ایک دو عنصری عمل ہے۔

ریمارک $\wedge(4,7) = 4$, $\vee(4,-7) = 4$, $\vee(4,7) = 7$ اور $\wedge(4,-7) = -7$ ہے۔

جب ایک سیٹ میں عناصر کی تعداد کم ہے، ہم ایک دوعنصری عمل * کو سیٹ A پر ایک جدول کے ذریعے عمل * کے لیے دکھا سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر $A = \{1,2,3\}$ پر غور کیجیے۔ تب، عمل $\vee$ کو مثال 33 میں A پر ذیل عمل جدول (جدول 1.1) پر بیان کیا گیا ہے۔ یہاں $\vee(1,2) = 2$, $\wedge(2,3) = 3$, $\vee(1,3) = 3$ ۔

جدول 1.1

V	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	3

ہمارے پاس یہاں عملی جدول میں (i,j) کے ساتھ 3 قطاریں اور 3 کالم ہیں، جدول میں سیٹ A کے i^{th} اور j^{th} عناصر کا اندراج عظیم ہے۔ اسے عام عملوں $* : A \times A \to A$ کے لیے عام کیا جاسکتا ہے۔ اگر

$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ تب عملی جدول میں n قطاریں اور m کالم $(i, j)^{th}$ اندراج کے ہوں گے کیونکہ

$a_i * a_j$ ہے۔ اس کے برعکس کوئی بھی عملی جدول جس میں n قطاریں اور m کالم دیئے ہوئے ہیں جس میں ہر ایک اندراج $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ کے ایک عنصر کا ہے، ہم ایک دوعنصری عمل $* : A \times A \to A$ کو بیان کرتے ہیں جو کہ $= a_i * a_j$ عملی جدول کی i^{th} قطار اور j^{th} کالم کا اندراج سے دیا گیا ہے۔

کوئی بھی یہ نوٹ کرسکتا ہے کہ 3 اور 4 کسی بھی ترتیب میں جوڑے جاسکتے ہیں اور نتیجہ وہی رہے گا، یعنی۔ $3 + 4 = 4 + 3$،
لیکن 3 اور 4 کی تفریق مختلف ترتیب میں مختلف نتیجہ دے گی، یعنی۔ $3 - 4 \neq 4 - 3$ اسی طرح 3 اور 4 کی ضرب میں، ترتیب کی کوئی اہمیت نہیں ہے، لیکن 3 اور 4 کی تفریق اور تقسیم بے معنیٰ ہے تفریق اور تقسیم کے لئے ہمیں لکھنا پڑے گا، '3 کی 4 سے تفریق کیجیے، 4 کی 3 سے تفریق کیجیے'، '3 کو 4 سے تقسیم کیجیے' یا '4 کو 3 سے تقسیم کیجیے'۔

یہ ذیل تعریف کی طرف لے جاتی ہے۔

تعریف 11 ایک سیٹ X میں ایک دوعنصری عمل تقلیبی کہلاتا ہے، اگر $a * b = b * a$ ہو، ہر ایک $a, b \in X$ کے لیے۔

مثال 34 دکھایئے کہ $+: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ اور $\times : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ تقلیبی دوعنصری عمل ہیں، لیکن $-: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ اور $\div: \mathbf{R}_* \times \mathbf{R}_* \to \mathbf{R}_*$، تقلیبی نہیں ہے۔

حل کیونکہ $a + b = b + a$ اور $a \times b = b \times a, \forall\, a, b \in \mathbf{R}$، '+' اور '×' تقلیبی دوعنصری عمل ہیں۔ حالانکہ، '–' تقلیبی نہیں ہے، کیونکہ $3 - 4 \neq 4 - 3$ کے۔ اسی طرح، $3 \div 4 \neq 4 \div 3$ دکھاتا ہے کہ '÷' تقلیبی نہیں ہے۔

مثال 35 دکھایئے کہ $*: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ جو کہ $a * b = a + 2b$ سے بیان کیا گیا ہے تقلیبی نہیں ہے۔

حل کیونکہ $3 * 4 = 3 + 8 = 11$ اور $4 * 3 = 4 + 6 = 10$، جو دکھاتا ہے کہ عمل * تقلیبی ہے۔

اگر ہم سیٹ X کو تین عناصر کا رفیق بنانا چاہیں، X پر دوعنصری عمل کے ذریعے، تو ہم ایک اصل مسئلہ پر زور دے رہے ہیں۔ عبارت $a * b * c$ کو اس طرح بھی دکھایا جا سکتا ہے $(a * b) * c$ یا $a * (b * c)$ کے ذریعے اور یہ دونوں عبارتیں ایک جیسی نہیں ہوں گی۔ مثال کے طور پر $(8-5)-2 \neq 8-(5-2)$۔ اس لیے، تین نمبروں 5،8 اور 3 کا اجتماع، ایک دوعنصری عمل 'تفریق' کے ذریعے بے معنی ہے، جب تک کہ بریکٹ کا استعمال نہ کیا جائے۔ لیکن جوڑے کے کیس میں $8 + 5 + 2$ کی برابر قدر ہے چاہے ہم اسے $(8 + 5) + 2$ یا $8 + (5 + 2)$ طرح سے دیکھیں۔ اس لیے 3 یا 3 سے زیادہ نمبروں کا اجتماع جوڑ کے ذریعے بمعنی ہے بغیر بریکٹ کا استعمال کئے ہوئے۔

یہ ذیل کی طرف لے جاتا ہے:

تعریف 12 ایک دوعنصری عمل $*: A \times A \to A$ ایک تلازمی عمل کہلاتا ہے اگر

$$(a * b) * c = a * (b * c), \forall\, a, b, c, \in A$$

مثال 36 دکھایئے کہ **R** پر جمع اور ضرب تلازمی دوعنصری عمل ہیں۔ لیکن تفریق **R** پر تلازمی نہیں ہے۔ تقسیم **R** پر تلازمی نہیں ہے۔

حل جوڑ اور ضرب تلازمی ہیں، کیونکہ $(a+b) + c = a + (b+c)$ اور $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)\, \forall\, a, b, c \in \mathrm{R}$ تمام کے لیے۔ حالانکہ، تفریق اور تقسیم تلازمی نہیں ہیں، کیونکہ $(8-5) - 3 \neq 8 - (5 - 3)$ اور $(8 \div 5) \div 3 \neq 8 \div (5 \div 3)$

مثال 37 دکھایئے کہ $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ جو کہ $a * b \to a + 2b$ سے دیا گیا ہے تلازمی نہیں ہے۔

حل عمل * تلازمی نہیں ہے، کیونکہ

$$(8 * 5) * 3 = (8 + 10) * 3 = (8 + 10) + 6 = 24,$$

جبکہ

$$8 * (5 * 3) = 8 * (5 + 6) = 8 * 11 = 8 + 22 = 30.$$

ریمارک دوعنصری عمل کی تلازمی خصوصیت اس سوچ میں بہت اہم ہے کہ یہ دوعنصری عمل کی خصوصیت ہے، ہم لکھ سکتے ہیں $a_1 * a_2 * ... * a_n$ جو کہ صاف نہیں ہے۔لیکن اس خصوصیت کی غیر موجودگی میں، عبارت $a_1 * a_2 * ... * a_n$ بے معنی ہے اگر ہم بریکٹ کا استعمال نہ کریں۔ اسے یاد کیجئے کہ پچھلی جماعتوں میں بریکٹوں کا استعمال اس وقت ہوتا تھا جب تفریق یا تقسیم کے عملیات ہوتے تھے یا ایک سے زیادہ عمل موجود ہوتے تھے۔

R پر دوعنصری عمل '+' کے لیے، صفر عدد کا دلچسپ منظر یہ ہے کہ $a + 0 = a = 0 + a$، یعنی۔ کوئی بھی نمبر میں صفر جوڑنے پر نمبر نہیں بدلتا۔ لیکن ضرب کے کیس میں، عدد 1، یہ کردار ادا کرتا ہے، کیونکہ $a \times 1 = a = 1 \times a, \forall\ a$ تمام **R** میں یہ ذیل کی تعریف کی طرف لے جاتا ہے۔

تعریف 13 ایک دوعنصری عمل $* : A \times A \to A$ دیا ہوا ہے، ایک عنصر $e \in A$، اگر یہ موجود ہے عمل * کے لئے تماثلہ کہلاتا ہے، اگر $a * e = a = e * a, a \in A$

مثال 38 دکھایئے کہ R پر جمع کے لیے صفر تماثلہ ہے اور 1، **R** پر ضرب کا ہے۔ لیکن عمل

$$- : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ اور } \div : \mathbf{R}_* \times \mathbf{R}_* \to \mathbf{R}_*$$

کے لیے کوئی تماثلی عنصر نہیں ہے۔

حل $a + 0 = 0 + a = a$ اور $a \times 1 = a = 1 \times a, \forall a \in \mathbf{R}$ کا مطلب ہے کہ O اور 1 بالترتیب عمل '+' اور '×' کے لیے تماثلی عناصر ہیں۔ اس کے آگے، R میں $a - e = e - a, \forall a$ کے لئے کوئی بھی عنصر e نہیں ہے۔

اسی طرح، **R** میں ہمیں کوئی بھی عنصر e نہیں ملتا، تا کہ $a \div e = e \div a, \forall a$، **R** میں کے لیے۔ اس طرح '–' اور '÷' کے لیے

کوئی بھی تماثلی عنصر نہیں ہے۔

ریمارک R پر جمع کے عمل کے لیے صفر تماثلہ ہے لیکن یہ N پر جمع کے عمل کے لیے تماثلہ نہیں ہے، کیونکہ $0 \notin \mathbf{N}$۔ حقیقت میں جمع کے عمل کا N کے لیے کو تماثلہ نہیں ہے۔

آگے یہ دھیان دیا جاتا ہے کہ جمع کے عمل کے لیے $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ کسی بھی دیئے ہوئے $a \in \mathrm{R}$ کے لئے R میں $-a$ موجود ہے تا کہ $a + ((-a)) = 0$ (+ جمع کے لئے تماثلہ) $= ((-a)) + a$

اسی طرح، R پر ضرب کے عمل کے لیے، دیئے ہوئے $a \neq 0$ R میں، ہم R میں $\frac{1}{a}$ چن سکتے ہیں تا کہ $a \times \frac{1}{a}$ $= a \times \frac{1}{a}$ (’×‘ کے لیے تماثلی)۔ یہ ذیل تعریف کی طرف لے جاتا ہے۔

تعریف 14 ایک عنصری $\mathrm{A} \times \mathrm{A} \to \mathrm{A} : *$، تماثلی عنصر e، A میں کے لیے ایک عنصر $a \in \mathrm{A}$ کو تقلیبی کہا جاتا ہے عمل * کے ساتھ، اگر کوئی عنصر b، A میں موجود ہے تا کہ $a * b = e = b * a$ اور b، a کا معکوس کہلاتا ہے اور اسے a^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 39 دکھایئے کہ R پر جمع کے عمل کے لیے a کا معکوس ’$-a$‘ ہے اور $\frac{1}{a}$، $a \neq 0$ کے لیے R پر ضرب کے عمل کے لیے معکوس ہے۔

حل کیونکہ $a + (-a) = a - a = 0$ اور $(-a) + a = 0, -a$، اس لئے ’$-a$‘ a کا جمع کے لیے معکوس ہے۔

اسی طرح، $a \neq 0$ کے لیے $a \times \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \times a$ کا مطلب ہے کہ $\frac{1}{a}$ ضرب کے لیے a کا معکوس ہے۔

مثال 40 دکھایئے کہ $-a$، $a \in \mathrm{N}$ کا معکوس نہیں ہے جمع کے عمل کے لیے ’+‘ N پر اور $\frac{1}{a}$، $a \in \mathrm{N}$ کا عمل معکوس نہیں ہے ضربی عمل × کا N پر، $a \neq 1$ کے لیے۔

حل کیونکہ $-a \notin \mathrm{N}, -a$، جمع کے عمل کے لیے، N پر a، $-a$ کا معکوس نہیں ہوسکتا، جب کہ ’$-a$‘ $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ کو مطمئن کرتا ہے۔

اسی طرح، $a \neq 1$ کے لیے N میں $\frac{1}{a}$، جس کا مطلب ہے کہ ’1‘ کے علاوہ N میں کسی بھی عنصر کا N پر ضربی عمل کے لیے معکوس نہیں ہوتا۔

مثالیں 38 ,36 ,34 اور 39 دکھاتی ہیں کہ R پر جمع تقلیبی اور تلازمی دوعنصری عمل ہے جس میں 0 تماثلی عنصر ہے اور $-a$، R میں a کا معکوس ہے تمام a کے لیے $a \in R$

مشق 1.4

1۔ معلوم کیجیے کہ کیا کسی ہر ایک تعریف جو کہ نیچے دی گئی ہے دوعنصری عمل دیتی ہے یا نہیں۔ جس میں ایک دوعنصری عمل نہیں ہے، اس کا جواز پیش کیجیے۔

(i) Z^+ پر، * بیان کیجیے $a * b = a - b$ کے ذریعے

(ii) Z^+ پر، * بیان کیجیے، $a * b = ab$ کے ذریعے

(iii) R پر، * بیان کیجیے $a * b = ab^2$ کے ذریعے

(iv) Z^+ پر، * بیان کیجیے $a*b=|a-b|$ کے ذریعے

(v) Z^+ پر، * بیان کیجیے، $a*b=a$ کے ذریعے

2۔ ہر ایک دوعنصری عمل * کے لیے جو کہ نیچے بیان کیا گیا ہے، معلوم کیجیے کہ کیا * تقلیبی ہے تلازمی۔

(i) Z، بیان کیجیے، $a * b = a - b$

(ii) Q پر، بیان کیجیے، $a*b=ab+1$

(iii) Q پر، بیان کیجیے $a * b = \frac{ab}{2}$

(iv) Z^+ پر، بیان کیجیے، $a * b = 2^{ab}$

(v) Z^+ پر، بیان کیجیے، $a * b = a^b$

(vi) $R-\{-1\}$، پر بیان کیجیے $a * b = \frac{a}{b+1}$

3۔ سیٹ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ پر دوعنصری عمل $\wedge$ پر غور کیجیے جو کہ $\{a, b\} = a \wedge b$ صغیر سے بیان کیا گیا ہے۔ عمل $\wedge$ کے لیے عملی جدول لکھیے۔

4۔ سیٹ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ پر ایک دوعنصری عمل * پر غور کیجیے جو کہ ذیل ضربی جدول (جدول 1.2) سے دیا گیا ہے۔

(i) $(2 * 3) * 4$ اور $2 * (3 * 4)$ کا حساب لگائیے۔

(ii) کیا * تقلیبی ہے؟

(iii)$(2 * 3) * (4 * 5)$ کا حساب لگائیے۔

(اشارہ: ذیل جدول استعمال کیجیے)

جدول 1.2

*	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	1	1
4	1	2	1	4	1
5	1	1	1	1	5

5۔ مان لیجیے '* سیٹ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ پر دوعنصری عمل ہے جو کہ a'* b = a اور b کا عاد اعظم مشترک (HCF) سے بیان کیا گیا ہے۔ کیا عمل '* عمل * کے جیسا ہے جو کہ اوپر ش 4 میں دیا گیا ہے؟ اپنے جواب کی وضاحت کیجیے۔

6۔ کیا * N پر دوعنصری عمل ہے جو کہ $a * b = a$ اور b کے دو اضعاف اقل (LCM) سے دیا گیا ہے۔ معلوم کیجیے۔

(i) $5 * 7,\ \ 20 * 16$ (ii) کیا * تقلیبی ہے؟

(iii) کیا * تلازمی ہے؟ (vi) * کا تماثلہ N میں دریافت کیجیے۔

(v) کا کون سے عنصر عمل * کے لئے تقلیبی ہیں۔

7۔ کیا * سیٹ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ پر بیان کیا گیا ہے۔ $a * b = a$ اور b کا عاد اعظم مشترک (HCF) ایک دوعنصری عمل ہے کے ذریعہ؟ اپنے جواب کی وضاحت کیجیے۔

8۔ مان لیجیے * ایک دوعنصری عمل N پر ہے جو کہ بیان کیا گیا ہے $a * b = a$ اور b کے عاد اعظم مشترک ہے۔ کیا * تقلیبی ہے؟ کیا * تلازمی ہے؟ کیا اس دوعنصری عمل جو کہ N کے اوپر ہے کے لیے تماثلہ موجود ہے؟

9۔ مان لیجیے ناطق اعداد کے سیٹ Q پر ایک دوعنصری عمل ہے جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے۔

(i) $a * b = a - b$ (ii) $a * b = a^2 + b^2$

(iii) $a * b = a + ab$ (iv) $a * b = (a - b)^2$

(v) $a*b=\frac{ab}{4}$ (vi) $a*b=ab^2$

وہ دوعنصری عمل دریافت کیجیے جو تقلیبی ہیں اور جو تلازمی ہیں۔

-10 دکھائیے کہ اوپر دیئے ہوئے کسی بھی عمل کی متماثلی نہیں ہے۔

-11 مان لیجئے $A = N \times N$ اور دوعنصری عمل A پر اس طرح بیان کیا گیا ہے۔

$$(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$$

دکھایئے کہ تقلیبی اور تلازمی ہے۔ * کے لئے A پر متماثلی عنصر معلوم کیجیے، اگر کوئی ہے۔

-12 دکھائے کہ کیا ذیل بیانات درست ہیں یا غلط۔ وضاحت کیجیے۔

(i) سیٹ N پر ایک دوعنصری عمل * کے لئے $a*a=a$ تمام $a \in N$ کیجیے۔

(ii) اگر *، N پر دوعنصری عمل ہے، تب $a * (b * c) = (c * b) * a$

-13 ایک دوعنصری عمل * پر N پر غور کیجئے جو کہ $a * b = a^3 + b^3$ سے بیان کیا گیا ہے۔ صحیح جواب چنیے۔

(A) کیا * دونوں تلازمی اور تقلیبی ہے؟

(B) کیا * تقلیبی ہے لیکن تلازمی نہیں؟

(C) کیا * تلازمی ہے لیکن تقلیبی نہیں؟

(D) کیا * نا تو تقلیبی ہے اور نہ تلازمی؟

متفرق مثالیں

مثال 41 اگر R_1 اور R_2 سیٹ A میں معادلتی رشتے ہیں، دکھائے کہ $R_1 \cap R_2$ بھی ایک معادلتی رشتہ ہے۔

حل کیونکہ R_1 اور R_2 معادلتی رشتے ہیں، $(a, a) \in R_1$ اور $(a, a) \in R_2$ $\forall\ a \in A$ کے لیے۔ اس سے نہ نکلتا ہے کہ $(a, a) \in R_1 \cap R_2$، $\forall\ a$ جو دکھاتا ہے کہ $R_1 \cap R_2$ رجوعی ہے۔ اس کے آگے، $(a, b) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a, b) \in R_1$ اور $R_1 \cap R_2$ اور $(a, b) \in R_1$ اور $(b, c) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_1$ اور $(a, c) \in R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_1 \cap R_2$ یہ دکھاتا ہے کہ $R_1 \cap R_2$ انتقالی ہے۔ اس طرح، $R_1 \cap R_2$ ایک

معادلت رشتہ ہے۔

مثال 42 مان لیجیے مثبت صحیح اعداد کے مرتب جوڑوں کے سیٹ A پر R ایک رشتہ ہے جو کہ $(x, y)\ R\ (u, v)$ سے بیان کیا گیا ہے اگر اور صرف $xv = yu$ ہے۔ دکھائیے کہ R ایک معادلتی رشتہ ہے۔

حل صاف طور پر $(x, y)\ R\ (x, y)$، $\forall\ (x, y) \in A$ ہے کیونکہ $xy = yx$ ہے۔ یہ دکھاتا ہے کہ R رجوعی ہے۔ اس کے آگے، $(x, y)\ R (u, v) \Rightarrow xv = yu \Rightarrow uy = vx$ اور اس طرح $(u, v)\ R\ (x, y)$ یہ دکھاتا ہے کہ R متشاکل ہے۔ اسی طرح، $(x, y)\ R\ (u, v)$ اور $(u, v)\ R\ (a, b) \Rightarrow xv = yu$ اور $ub = va \Rightarrow xv\dfrac{a}{u} = yu\dfrac{a}{u} \Rightarrow xv\dfrac{b}{v} = yu\dfrac{a}{u} \Rightarrow xb = ya$ اور اس لیے $(x, y)\ R\ (a, b)$۔ اس طرح R انتقالی ہے۔ اس طرح، R ایک معادلتی رشتہ ہے۔

مثال 43 مان لیجیے $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$۔ R_1، X میں ایک رشتہ ہے جو کہ دیا گیا ہے $R_1 = \{(x, y) : x - y$ سے 3 تقسیم ہوتا ہے$\}$ اور R_2، X پر ایک دوسرا رشتہ ہے جو دیا گیا ہے $R_2 = \{(x, y): \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}\}$ یا $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ یا $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\}\}$ دکھائیے کہ $R_1 = R_2$ ہے۔

حل یہ نوٹ کر لیجیے کہ سیٹوں $\{1, 4, 7\}$، $\{2, 5, 8\}$ اور $\{3, 6, 9\}$ کی خصوصیات ہیں کہ ان کا فرق وہ ہے جو ان سیٹس کے دو عناصر کے درمیان میں 3 کا صعف ہے۔ اس لیے $(x, y) \in R_1 \Rightarrow x - y$، 3 کا صعف ہے۔ $\Rightarrow \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ یا $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ یا $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\} \Rightarrow (x, y) \in R_2$ اس لیے، $R_1 \subset R_2$۔ اسی طرح $\{x, y\} \in R_2 \Rightarrow \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ یا $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ یا $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\} \Rightarrow x - y$ سے 3 تقسیم ہوتا ہے $\Rightarrow \{x, y\} \in R_1$ یہ دکھاتا ہے $R_2 \subset R_1$ اس طرح

مثال 44 مان لیجیے $f : X \to Y$ ایک تفاعل ہے۔ X میں رشتہ R بیان کیجیے۔ جو کہ دیا گیا ہے $R = \{(a, b): f(a) = f(b)\}$ جانچ کیجیے کہ کیا R ایک معادلتی رشتہ ہے۔

حل ہر ایک $a \in X$، $(a, a) \in R$، کیونکہ $f(a) = f(a)$ ہے، جو دکھاتا ہے کہ R رجوعی ہے۔ اسی طرح $(a, b) \in R \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(b) = f(a) \Rightarrow (b, a) \in R$۔ اس لیے R متشاکل ہے۔ اس کے آگے $(a, b) \in R$ اور $(b, c) \in R \Rightarrow f(a) = f(b)$ اور $f(b) = f(c) \Rightarrow f(a) = f(c) \Rightarrow (a, c) \in R$ جس کا مطلب ہے R انتقالی ہے۔ اس طرح R ایک معادلتی رشتہ ہے۔

مثال 45 دریافت کیجیے کہ ذیل میں کون سے دوعنصری عمل سیٹ N پر تلازمی ہیں اور کون سے تقلیبی ہیں۔

(a) $a * b = 1 \quad a, b \in \mathbf{N}$ (b) $a * b = \dfrac{(a+b)}{2} \quad a, b \in \mathbf{N}$

حل (a) صاف طور پر تعریف ہے $a*b = b*a = 1, \forall\, a, b \in \mathbf{N}$ ساتھ ہی $(a*b)*c = (1*c) = 1$ اور $a*(b*c) = a*, \forall$ $(1) = 1, a, b, c \in \mathbf{N}$

(b) جو دکھاتا ہے کہ * تقلیبی ہے $a*b = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{b+a}{2} = b*a$

اس کے آگے، $(a * b) * c = \left(\dfrac{a+b}{2}\right) * c.$

$$= \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right) + c}{2} = \frac{a+b+2c}{4}$$

لیکن $a * (b * c) = a * \left(\dfrac{b+c}{2}\right)$

عام طور پر $= \dfrac{a + \frac{b+c}{2}}{2} = \dfrac{2a+b+c}{4} \neq \dfrac{a+b+2c}{4}$

اس لئے * تلازمی نہیں ہے۔

مثال 46 سیٹ $A = \{1, 2, 3\}$ سے اپنے آپ میں تمام یک۔ یک تفاعل کی تعداد دریافت کیجیے۔

حل یک۔ یک تفاعل $\{1, 2, 3\}$ سے اپنے آپ میں آسانی سے ایک مبادلہ ہے تین علامتوں 3 ,2 ,1 پر۔ اس لئے یک۔ یک۔ نقشوں کی کل تعداد $\{1, 2, 3\}$ سے اپنے آپ میں بالکل ایسی ہے جیسا کہ تینوں علامتوں 3 ,2 ,1 پر مبادلہ کی کل تعداد جو کہ $3! = 6$ ہے۔

مثال 47 مان لیجیے $A = \{1, 2, 3\}$ ہے۔ تب دکھائیے کہ رشتوں کی تعداد جن میں (1, 2) اور (2, 3) موجود ہیں جو کہ رجوعی اور انتقالی ہیں لیکن متشاکل نہیں 3 ہے۔

حل سب سے چھوٹا رشتہ R_1 جس میں (1, 2) اور (2, 3) موجود ہیں جو کہ رجوعی اور انتقالی ہیں لیکن متشاکل نہیں $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ یہ ہے۔ اب، اگر ہم جوڑے (2, 1) کو R_1 میں جوڑیں R_2 حاصل کرنے کے

لئے، تب رشتہ R_2 رجوعی ہوگا لیکن متشاکل نہیں۔ اسی طرح، ہم R_3 اور R_4 بالترتیب (3, 2) اور (3, 1) کو جوڑ کر حاصل کر سکتے ہیں R_1 میں مطلوبہ رشتے حاصل کرنے کے لئے۔ حالانکہ ہم (2,1)، (3,2) اور (3,1) میں جوڑوں کو R_1 کے کبھی بھی نہیں جوڑ سکتے، کیونکہ اس طرح کرنے سے، ہمیں جبراً تیسرے جوڑے کو جوڑنا پڑے گا ایک ترتیب میں انتقالیت کو برقرار رکھنے کے لئے اور اس سلسلہ میں رشتہ متشاکل ہو جائے گا۔ ساتھ ہی جو درکار نہیں ہے اس طرح مطلوبہ رشتہ کی کل تعداد تین ہے۔

مثال 48 دکھایئے کہ سیٹ {1, 2, 3} میں معادلتی رشتوں کی رشتوں کی تعداد جس میں (1, 2) اور (2, 1) شامل ہے 2 ہے۔

حل سب سے چھوٹی معاولت رشتہ R_1 ہے جس میں (1,2) اور (2,1) شامل ہے {(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)} ہے۔ اب ہمارے پاس صرف 4 جوڑے باقی ہیں جن کے نام ہیں (3, 1), (2, 3), (3, 2) اور (3,1)۔ اگر ہم ان میں سے کسی ایک کو جوڑتے ہیں۔ مثال کے طور پر (2, 3) کو R_1 میں، تب متشاکلت کے لئے ہمیں (3, 2) بھی جوڑنا ہوگا۔ اور اب انتقالیت کے لئے جبراً ہمیں (1, 3) اور (3, 1) کو جوڑنا ہوگا۔ اس طرح معاولت رشتہ R_1 سے بڑا صرف آفاقی رشتہ ہے۔ یہ دکھاتا ہے کہ معاولت رشتوں کی تعداد جن میں (1, 2) اور (2, 1) شامل 2 ہے۔

مثال 49 دکھایئے کہ {1, 2} پر دو عنصری عملوں کی تعداد جس کا تماثلہ 1 ہے اور اس میں 2 کا معکوس 2 موجود ہے بالکل ایک ہے۔

حل دو عنصری عمل* {1, 2} پر ایک تفاعل ہے {1,2}×{1,2} سے {1,2} کو، یعنی، ایک تفاعل {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)}→{1, 2}۔ کیونکہ مطلوبہ دو عنصری عمل * کے لئے '1' متماثلی اس لئے 2=(2, 1)*, 2=(1, 2)*, 1=(1,1)*, * ہے اور چننے کے لئے (2, 2) برابر ہونا چاہئے '1' کے۔ اس طرح، مطلوبہ دو عنصری عمل کی تعداد صرف ایک ہے۔

مثال 50 تماثلی تفاعل $I_N : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ پر غور کیجیے جو کہ $I_N(x) = x \, \forall x \in \mathbf{N}$ سے بیان کی گئی ہو۔ دکھایئے کہ ساتھ ہی I_N پر ہے لیکن $I_N + I_N : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ جو کہ بیان کیا گیا ہے۔

بر نہیں ہے $(I_N + I_N)(x) = I_N(x) + I_N(x) = x + x = 2x$

حل صاف طور پر I_N بر ہے۔ لیکن $I_N + I_N$ بر نہیں ہے، کیونکہ عنصر 3 کو ہم علاقہ **N** میں دریافت کر سکتے ہیں تاکہ کوئی بھی علاقہ x علاقہ **N** موجود نہیں ہے $3 = (I_N + I_N)(x) = 2x$ کے ساتھ۔

مثال 51 تفاعل $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$ پر غور کیجیے جو کہ $f(x) = \sin x$ سے دیا گیا ہے اور $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$، دونوں f اور g یک ۔ یک ہونے چاہئے ہیں۔لیکن $(f+g)(0) = \sin 0 + \cos 0 = 1$ اور $(f+g)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1$ ہے۔اس لئے $f+g$ یک یک نہیں ہے۔

حل کیونکہ کہیں دو مختلف عناصر x_1 اور x_2 کے لئے $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ میں، $\sin x_1 \neq \sin x_2$ اور $\cos x_1 \neq \cos x_2$ دونوں f اور g یک ۔ یک ہوتے چاہیے ہیں۔ لیکن $(f+g)(0) = \sin 0 + \cos 0 = 1$ اور $(f+g)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1$ ہے۔اس لئے $f+g$ یک یک نہیں ہے۔

باب 1 پر مبنی متفرق مشق

1۔ مان لیجئے $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ جو کہ $f(x) = 10x + 7$ سے بیان کیا گیا ہے ۔ $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ تفاعل دریافت کیجئے تا کہ $g\,of = fog = 1_{\mathbf{R}}$

2۔ مان لیجئے $f : \mathrm{W} \to \mathrm{W}$ جو کہ $f(n) = n - 1$ سے بیان کیا گیا ہے، اگر n طاق ہے اور $f(n) = n+1$، ہے اگر n جفت ہے۔دکھائیے کہ f تقلیبی ہے۔f کا معکوس معلوم کیجیے۔W تمام مکمل اعداد کا سیٹ ہے۔

3۔ اگر $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$، $f(x) = x^2 - 3x + 2$ سے بیان کیا گیا ہے، $f(f(x))$ دریافت کیجیے۔

4۔ دکھائیے کہ فنکشن $f : \mathbf{R} \to \{x \in \mathbf{R} : -1 < x < 1\}$ جو کہ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ سے بیان کیا گیا ہے، اور $x \in \mathbf{R}$ ہے یک ۔ یک اور اون ٹو تفاعل ہے۔

5۔ دکھائیے کہ تفاعل $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ جو کہ $f(x) = x^3$ دیا گیا ہے، یک – یک ہے۔

6۔ دو تفاعل $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ اور $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ کی مثالیں دیجئے تا کہ gof یک – یک ہے لیکن g یک – یک نہیں ہے۔
(اشارہ $f(x) = x$ اور $g(x) = |x|$ پر غور کیجیے۔)

7۔ دو تفاعل $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ اور $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ کی مثالیں دیجئے تا کہ $g\;of$ بر ہے لیکن f، اون ٹو نہیں ہے

(اشارہ $f(x) = x + 1$ اور $g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{if } x > 1 \\ 1 & \text{if } x = 1 \end{cases}$)

8۔ ایک غیر خالی سیٹ X دیا گیا ہے، P(X) پر غور کیجیے جو کہ X کے تمام ماتحت سیٹ کا پیٹ ہے۔ رشتہ R کو P(X) میں اس طرح سے بیان کیا گیا ہے۔ ماتحت سیٹ A, B کے لیے P(X), ARB اگر اور صرف اگر $A \subset B$۔ کیا R, P(X) پر ایک معادلتی رشتہ ہے؟ اپنے جواب کی وضاحت کیجیے۔

9۔ ایک غیر خالی سیٹ X دیا گیا ہے۔ دو عنصری عمل $*: P(X) \times P(X) \to P(X)$ پر غور کیجیے جو کہ $A * B = A \cap B \, \forall A, B$ میں موجود ہیں کے لیے دیا گیا ہے، جہاں X, P(X) کا پاور سیٹ ہے۔ دکھایئے کہ X ایک تماثلی عنصر ہے اس عمل کے لیے اور صرف X قابلِ تعکیس عنصر ہے P(X) میں عمل * کو مدنظر رکھتے ہوئے۔

10۔ سیٹ $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ سے خود میں تمام اون ٹو تفاعلات کی تعداد دریافت کیجیے۔

11۔ مان لیجیے $S = \{a, b, c\}$ اور $T = \{1, 2, 3\}$ ہیں۔ ذیل تفاعل F کا F^{-1}، S سے T دریافت کیجیے۔ اگر یہ موجود ہے۔

(i) $F = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1)\}$ (ii) $F = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1)\}$

12۔ دو عنصری عمل $*: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ اور $o: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ پر غور کیجیے جو کہ $a * b = |a - b|$ اور $a \text{ o } b = a, \forall$ تمام $a, b \in \mathbf{R}$ کے لیے بیان کیا گیا ہے۔ دکھایئے کہ * تقلیبی ہے لیکن تلازمی نہیں، o تلازمی ہے لیکن تقلیبی نہیں۔ اس کے آگے، دکھایئے کہ تمام $a, b, c \in \mathbf{R}$ کے لیے $a * (b \text{ o } c) = (a * b) \text{ o } (a * b)$ [اگر یہ ایسا ہی ہے، ہم کہتے ہیں کہ عمل *، عمل o کے اوپر تقسیم کرتا ہے]۔ کیا o، * کے اوپر تقسیم کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وضاحت کیجیے۔

13۔ ایک غیر خالی سیٹ X دیا ہوا ہے، مان لیجیے $*: P(X) \times P(X) \to P(X)$ جو کہ $A * B = (A - B) \cup (B - A), \forall A, B \in P(X)$ سے تمام $A, B \in P(X)$ کے لیے بیان کیا گیا ہے۔ دکھایئے کہ خالی سیٹ ϕ عمل * کے لئے تماثلہ ہے اور A کے تمام عناصر P(X) کے قابلِ تعکیس ہیں $A^{-1} = A$ کے ساتھ۔

(اشارہ: $(A - \phi) \cup (\phi - A) = A$ اور $(A - A) \cup (A - A) = A * A = \phi$)

14۔ سیٹ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ پر ایک دو عنصری عمل * بیان کیجیے۔ جو اس طرح ہے۔

$$a * b = \begin{cases} a + b, & \text{if } a + b < 6 \\ a + b - 6 & \text{if } a + b \geq 6 \end{cases}$$

دکھائے کہ اس عمل کے لیے صفر تماثلہ ہے اور سیٹ کا ہر عنصر a قابلِ تعکیس ہے اور $6-a$، a کا معکوس ہے۔

15۔ مان لیجیے $A = \{-1,0,1,2\}, B=\{-4,-2,0,2\}$ اور $f,g:A\to B$ ایک تفاعل ہے جو کہ $f(x) = x^2 - x, x \in A$ اور $g(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right| - 1, x \in A$ سے بیان کیا گیا ہے۔ کیا f اور g برابر ہیں۔ اپنے جواب کی وضاحت کیجیے۔

(اشارہ: یہ نوٹ کیا جا سکتا ہے کہ دو تفاعل $f: A \to B$ اور $g: A\to B$ ہیں تا کہ $f(a) = g(a) \forall a \in A$ برابر تفاعل کہلاتے ہیں۔

16۔ مان لیجیے $A = \{1, 2, 3\}$ رشتوں کی تعداد جن میں $(1, 2)$ اور $(1, 3)$ موجود ہوں جو کہ رجوعی اور متشاکل ہے لیکن انتقالی نہیں ہے۔

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

17۔ مان لیجیے $A = \{1, 2, 3\}$۔ تب معاولت کے رشتوں کی تعداد جن میں $(1, 2)$ شامل ہو یہ ہے۔

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

18۔ مان لیجیے $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ایک سگنم تفاعل ہے جو کہ اس طرح بیان کیا گیا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

اور $g: R \to R$ عظیم صحیح عدد تفاعل ہے جو کہ دیا گیا ہے $g(x) = [x]$ سے، جہاں $[x]$ عظیم صحیح عدد محور ہے x یا سے چھوٹا تب کیا fog اور gof $(0, 1]$ میں ملتے ہیں؟

19۔ سیٹ $\{a, b\}$ پر دو عنصری عمل کی تعداد ہیں۔

(A) 10 (B) 16 (C) 20 (D) 8

خلاصہ

اس باب میں ہم نے مختلف قسم کے رشتوں کے بارے میں پڑھا ہے اور معادلتی کے رشتے کے بارے میں، تفاعلات کے ترکیب اجزائی معکوس تفاعل اور دو عنصری عمل۔ اس باب کی اہم مختلف حصہ اس طرح دیئے ہوئے ہیں۔

- X میں خالی رشتہ، رشتہ R ہے جو کہ دیا گیا ہے $R = \phi \subset X \times X$۔
- آفاقی رشتہ X میں رشتہ R ہے جو کہ دیا گیا ہے $R = X \times X$۔

- رجوعی رشتہ R،X میں ایک رشتہ ہے $R \ni (a, a)$ کے ساتھ، تمام $a \in X\ \forall$۔
- متشاکل رشتہ R،X میں ایک رشتہ ہے جو $(a, b) \in R$ کو مطمئن کرتا ہے جس کا مطلب ہے $(b, a) \in R$۔
- انتقالی رشتہ R،X میں ایک رشتہ ہے جو کہ $(a,b)\in R$ اور $(b,c)\in R$ کو مطمئن کرتا ہے جس کا مطلب ہے $(a,c)\in R$۔
- معادلتی کا رشتہ R،X میں ایک رشتہ ہے جو کہ رجوعی، متشاکل اور انتقالی ہے۔
- معادلتی کلاس $[a]$ جس میں $a\in X$ موجود ہے ایک معاولت کا رشتہ R کے لئے X میں X کا ماتحت سیٹ ہے تمام عناصر a,b سے تعلق رکھنے والے موجود ہیں۔
- ایک تفاعل $f : X \to Y$ یک یک ہے (یا داخلی ہے) اگر
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\ x_1,\ x_2 \in X$$
- ایک تفاعل $f : X\to Y$ اون ٹو ہے، (باہر فنکشن ہے) اگر کسی بھی $y\in Y$ کے لیے $\exists x\in X$ تا کہ $f(x) = y$۔
- ایک تفاعل $f : X\to Y$ یک۔ یک اور اون ٹو ہے (یا دوعنصری)، اگر f دونوں یک یک اور اون ٹو ہے۔
- تفاعل f کے ترکیب $f : A\to B$ اور $g:B\to C$ ایک تفاعل ہے $gof:A\to C$ جو کہ $gof(x)= g(f(x))\ \forall\ x\in A$ دیئے گئے ہیں۔
- ایک تفاعل $f:X\to Y$ قابلِ تعکیس ہے اور اگر $\exists\ g:Y\to X$ تا کہ $gof = I_X$ اور $fog = I_Y$ ۔
- ایک تفاعل $f :X\to Y$ قابلِ تعکیس ہے اگر اور صرف اگر f یک یک اور اون ٹو ہے۔
- ایک متناہی سیٹ X دیا ہوا ہے، ایک فنکشن $f: X \to X$ یک یک ہے (ساتھ ہی اون ٹو) اگر اور صرف اگر f، اون ٹو (ساتھ ہی یک یک)۔ یہ ایک متناہی سیٹ کی کرداری خصوصیت ہے۔ یہ غیر متناہی سیٹ کے لئے درست نہیں ہے۔
- ایک دوعنصری عمل * ایک سیٹ A پر ایک فنکشن ہے $A \times A$ سے A تک۔
- ایک عنصر $e\in X$ دوعنصری عمل کے لئے تماثلی عنصر ہے: $*:X\times X\to X$ اگر $a\in X$ $a*e=a=e*a$ تمام $a\in X$ کے لیے۔
- ایک عنصر $a \in X$ دوعنصری عمل $* : X \times X \to X$ کے لیے قابلِ تعکیس ہے اگر $b\in X$ موجود ہے تا کہ $a*b=e=b*a$۔ جہاں دوعنصری عمل * کے لئے e متماثلی ہے۔ عنصر b، a کا معکوس کہلاتا ہے اور a^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- ایک عمل * کے لئے e پر تقلیبی ہے اگر $a * b=b * a$ ہے تمام $a, b\ \forall$ X میں موجود ہیں۔
- ایک عمل * X پر تلازمی ہے اگر $(a * b) * c = a * (b * c)$ تمام a, b, c کے لئے جو X میں ہیں۔

تاریخ کے اوراق

فنکشن کی سوچ بہت لمبے عرصے سے موجود ہے جو کہ R-ڈیس کارٹس (1596-1650) کے زمانے سے شروع ہوتی ہے، جس نے اپنی ہاتھ سے لکھی کتاب ''جیومیتر یائی'' 1637 میں جس کا مطلب ہے کچھ مثبت صحیح طاقتیں x^n ایک متغیر x کی جب وہ جیومیتر یائی منحنیوں کا مطالعہ کررہا تھا مثال کے طور پر زائد، مکافی اور ناقص۔ جیمس گری گوری (1636-1675) نے اپنے کام "Vera Circuliet Hyperbolae Quadratura" (1667) میں غور کیا ہے کہ فنکشن ایک تعداد ہے جو کہ دوسری تعداد سے حاصل ہوتا ہے طریقہ الجبری عملیات یا کسی بھی دوسرے عملیات سے۔ بعد میں جی۔ ڈبلو۔ لینٹس (1646-1716) اپنی کتاب *"Methodus tangentium inversa, seu de functionibus"* جو کہ (1673) میں لکھی گئی ہے لفظ 'فنکشن' کا مطلب ہے ایک اشیاء جو منحنی پر ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ پر تبدیل ہو رہی ہے جیسے کہ منحنی پر ایک نقطہ کے مختص 'منحنی کا سلوپ' ایک نقطہ پر مماس اور نارمل۔ حالانکہ، اپنی کتاب 'Historia' (1714) میں لینٹس نے لفظ ''فنکشن'' کا مطلب نکالا ہے وہ اشیاء جو متغیر پر منحصر ہیں۔ وہ پہلا آدمی تھا جس نے x کا فنکشن کا استعمال کیا ہے۔ جون برنولی (1667-1748) نے علامت $\phi(x)$ کا استعمال پہلی بار 1718 میں x کے فنکش کو ظاہر کرتی ہیں۔ کولیون ہارڈ (1707-1783) نے عام طور پر گلے لگایا اپنی کتاب *"Theorie des functions analytiques"* 1793 میں چھاپی، جہاں اس نے تخلیلی فنکشن پر بحث ومباحثہ کیا اور علامات f, F, ϕ, ψ ... وغیرہ وغیرہ کا استعمال x کے مختلف فنکشنوں کے لئے کیا۔ اس کے بعد *Lejeunne Dirichlet* (1805-1859) نے فکشن کی تعریف بیان کی جو اس وقت تک استعمال ہوتی رہی جب تک کہ حال میں استعمال ہونے والی فنکشن کا نظریہ نہ آ گیا، یہ اس وقت تک دی گئی جب تک سیٹ کا نظریہ جو کہ رج کینٹر (1845-1916) نے پیدا کیا۔ فنکشن کی سیٹ نظریہ آئی اور یقین جنہیں آج جانا جاتا ہے صرف ایک نچوڑ ہے Dirichlet کے ذریعہ دی گئی تعریف کا ایک بہت ہی بے ترتیب انداز ہیں۔