باب **3**

خط مستقیم میں حرکت

(Motion in a Straight Line)

3.1 تعارف (INTRODUCTION)

کائنات کی ہر شے راہِ راست یا بالواسطہ طور پر متحرک رہتی ہے۔ ہمارا چلنا، دوڑنا، سائیکل کی سواری وغیرہ روزمرہ کی زندگی میں دکھائی دینے والے عمل حرکت کی کچھ مثالیں ہیں۔ یہاں تک کہ نیند کی حالت میں بھی ہمارے پھیپھڑوں میں ہوا کے داخل ہونے اور اس کے اخراج کا عمل اور ہماری شریانوں اور وریدوں میں خون کا بہاؤ ہوتا رہتا ہے۔ ہم پیڑوں سے گرتے ہوئے پتوں کو اور باندھ سے بہتے ہوئے پانی کو دیکھتے ہیں۔ موٹر گاڑی اور ہوائی جہاز مسافروں کو ایک جگہ سے دوسری جگہ لے جاتے ہیں۔ زمین 24 گھنٹے میں ایک بار گردش کرتی ہے اور سال میں ایک بار سورج کے گرد طواف پورا کرتی ہے۔ سورج اپنے سیاروں کے ساتھ ساتھ خود ہماری کہکشاں (آکاش گنگا – Milky Way) میں حرکت کرتا ہے، اور جو خود اپنے گیلیکسیوں کے مقامی گروپ میں حرکت کرتی ہے۔

اس طرح وقت کے ساتھ شے کے مقام میں تبدیلی کو حرکت کہتے ہیں۔ وقت کے ساتھ مقام میں کیسے تبدیلی واقع ہوتی ہے؟ اس باب میں ہم حرکت کو بیان کرنا سیکھیں گے۔ اس کے لیے ہمیں رفتار اور اسراع کے تصور کو سمجھنا ہوگا۔ اس سبق میں ہم اپنا مطالعہ اشیا کی خط مستقیم میں حرکت تک ہی محدود رکھیں گے۔ اسے **مستقیم حرکت** (rectilinear motion) بھی کہتے ہیں۔ یکساں اسراع کے ساتھ مستقیم حرکت کے لیے کچھ سادہ مساوات حاصل کی جاسکتی ہیں۔ آخر میں حرکت کی نسبتی فطرت کو سمجھنے کے لیے ہم نسبتی رفتار کا تصور پیش کریں گے۔

اس مطالعہ میں ہم متحرک اشیا کو نقطہ اشیا کے طور پر سمجھیں گے۔ یہ تقریبی صورتیں تب تک درست سمجھی جاسکتی ہیں جب تک شے کا سائز ایک قابلِ لحاظ دوران وقت میں شے کے ذریعے طے کی گئی دوری کی نسبت کافی کم ہے۔ حقیقی زندگی میں بہت سی حالتوں میں اشیا کے سائز کو نظرانداز کیا جاسکتا ہے اور بغیر کثیر غلطی کے انھیں ایک نقطہ شے مانا جاسکتا ہے۔

مجرد حرکیات (Kinematics) میں ہم شے کی حرکت کے اسباب پر توجہ نہ دے کر صرف اس کی حرکت کا ہی مطالعہ کرتے ہیں۔ اس باب میں اور اگلے باب میں مختلف قسم کی حرکات کو بیان کیا گیا ہے۔ ان حرکات کے اسباب کا مطالعہ ہم پانچویں باب میں کریں گے۔

3.2 مقام، راہ کی لمبائی اور نقل (POSITION PATH LENGTH AND DISPLACEMENT)

آپ پہلے ہی سیکھ چکے ہیں کہ حرکت کسی شے کے مقام میں' وقت کے ساتھ' تبدیلی کو کہتے ہیں۔ مقام کا تعین کرنے کے لیے، ہمیں ایک حوالہ نقطہ (reference point) اور محوروں (axes) کے ایک سیٹ کی ضرورت ہوتی ہے۔ سہولت اس میں ہے کہ ہم ایک مستطیل نما مختص نظام (rectangular coordinate system) منتخب کریں، جو تین باہم عمودی (mutually perpendicular) محوروں پر مشتمل ہوتا ہے۔ ان محوروں کو x-، y-، اور z- لیبل کیا جاتا ہے۔ ان تینوں محوروں کا نقطہ تقاطع (point of intersection) مبدا (origin) (O) کہلاتا ہے، جو حوالہ نقطہ کے بہ طور استعمال ہوتا ہے۔ ایک شے کے کوآرڈی نیٹس (x, y, z)، اِس کوآرڈی نیٹ نظام کی مناسبت سے، اس کے مقام کو بیان کرتے ہیں۔ وقت کی پیائش کے لیے، ہم اِس نظام میں ایک گھڑی شامل کرتے ہیں۔ یہ کوآرڈی نیٹ نظام بہ شمولیت گھڑی، ایک حوالہ جاتی فریم (reference frame) کی تشکیل کرتا ہے۔

اگر' وقت کے ساتھ' کسی شے کا ایک یا اس کے ایک سے زیادہ کوآرڈی نیٹ تبدیل ہوتے ہیں، تو ہم کہتے ہیں کہ شے حرکت کررہی ہے۔ ورنہ شے، اپنے حوالہ جاتی فریم کے مطابق حالتِ سکون میں کہلاتی ہے۔

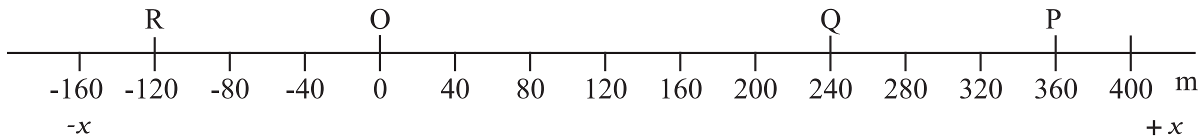
کسی حوالہ جاتی فریم میں محوروں کا انتخاب حالت پر منحصر ہے۔ مثلاً یک بعد (one dimension) میں حرکت کو بیان کرنے کے لیے، ہمیں صرف x- محور چاہیے۔ لیکن دو/تین ابعاد میں حرکت کو بیان کرنے کے لیے دو/تین محوروں کا سیٹ چاہیے ہوگا۔

کسی واقعہ کا بیان، بیان کے لیے منتخب کیے گئے حوالہ جاتی فریم کے تابع ہوتا ہے۔ مثلاً، جب آپ کہتے ہیں کہ ایک موٹر سڑک پر چل رہی (حرکت کررہی) ہے تو آپ اس حوالہ جاتی فریم کی مناسبت سے موٹر کو بیان کررہے ہیں جو خود آپ سے یا زمین سے منسلک ہے۔ لیکن اسی موٹر میں بیٹھے ہوئے ایک شخص سے منسلک حوالہ جاتی فریم کی مناسبت سے موٹر حالتِ سکون میں ہے۔

ایک خطِ مستقیم پر حرکت کو بیان کرنے کے لیے، ہم کوئی ایک محور، فرض کیا x-محور، منتخب کرسکتے ہیں، اس طرح کہ وہ شے کی راہ پر منطبق ہو۔ اس پر ہم شے کے مقام کی پیائش اپنی سہولت کے مطابق منتخب کیے گئے کسی مبدا (شکل 3.1 میں دکھائے گئے نقطہ O) کے حوالے سے کرتے ہیں۔ نقطہ O کے دائیں جانب کے مقامات کو مثبت اور O کے بائیں جانب کو منفی کے طور پر لیتے ہیں۔ اس طریقے کے مطابق شکل 3.1 میں P اور Q کے مقام کوآرڈنیٹ (postion co-ordinates) علی الترتیب + 360 m اور + 240 m ہیں۔ اسی طرح نقطہ R کا مقام کوآرڈی نیٹ −120 m ہے۔

راہ کی لمبائی (Path length)

تصور کیجیے کہ کوئی موٹر کار ایک خطِ مستقیم پر حرکت کررہی ہے۔ ہم x- محور اس طرح منتخب کرتے ہیں کہ موٹر کی حرکت کی راہ کے ساتھ یہ منطبق ہو اور محور کا مبدا وہ نقطہ لیتے ہیں جہاں سے کار چلنا شروع کرتی ہے، یعنی وقت t = O پر موٹر مقام O پر تھی (شکل 3.1)۔ مان لیجیے کہ الگ الگ ساعتوں پر موٹر کے مقام P، Q اور R سے ظاہر ہوتے ہیں۔ یہاں ہم حرکت کے دو واقعات پر غور کریں گے۔ پہلے واقعہ میں موٹر O سے P تک جاتی ہے۔ لہٰذا کار کے ذریعے چلے گئے راستے کی دوری OP = +360 m ہے۔ اس دوری کو کار کے ذریعے طے کیے گئے راستے کی لمبائی (راہ کی لمبائی) کہتے ہیں۔ دوسرے واقعہ میں کار پہلے O سے P تک جاتی ہے اور پھر P سے Q پر واپس ہو جاتی ہے۔ اس حرکت کے دوران کار کے ذریعے طے کی



شکل 3.1 محور، مبدا اور مختلف اوقات پر موٹر کے مقام

گئی دوری

$$OP + PQ = + 360\ m + (+120\ m) = + 480\ m.$$

ہوگی۔ کیونکہ راہ کی لمبائی میں صرف عددی قدر ہوتی ہے سمت نہیں، لہٰذا یہ ایک غیر سمتی (عددیہ scalar) مقدار ہے۔ (باب 4 دیکھیے)

نقل *(Displacement)*

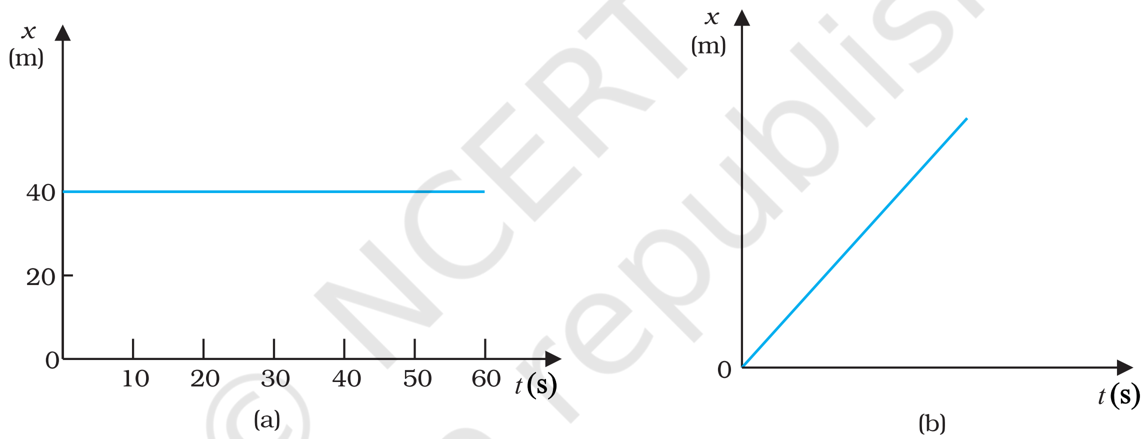
یہاں ایک دوسری طبعی مقدار 'نقل' کو اشیا کے مقام میں تبدیلی کی شکل میں متعارف کرنا مفید ہے۔ تصور کیجیے کہ وقت t_1 اور t_2 پر شے کے مقام بالترتیب x_1 اور x_2 ہیں۔ تب $\Delta t = (t_2 - t_1)$ وقت میں اس کا نقل جسے ہم Δx سے ظاہر کرتے ہیں، اختتامی اور ابتدائی مقاموں کے فرق کے ذریعے ظاہر کیا جاتا ہے:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

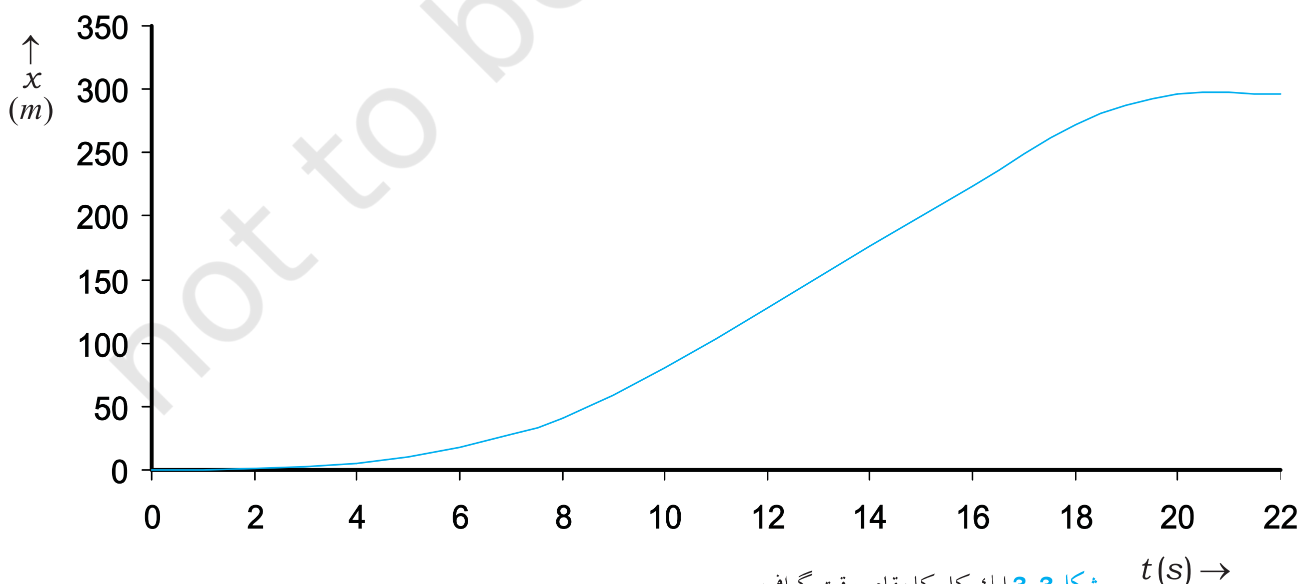
(ہم گریک حرف ڈیلٹا (Δ) کا استعمال کسی مقدار میں تبدیلی کو ظاہر کرنے کے لیے کرتے ہیں۔

اگر $x_2 > x_1$ تو Δx مثبت ہوگا، لیکن اگر $x_2 < x_1$ تو Δx منفی ہوگا۔

نقل میں عددی قدر اور سمت دونوں ہوتے ہیں۔ ایسی مقداروں کو سمتیہ (vector) کے ذریعے ظاہر کیا جاتا ہے۔ آپ سمتیوں کے بارے میں اگلے باب میں پڑھیں گے۔ اس باب میں ہم ایک خط مستقیم پر حرکت (جسے **مستقیم حرکت** بھی کہا جاتا ہے) کے بارے میں پڑھیں گے۔ ایک



شکل 3.2 مقام ـ وقت گراف، جب (a) شے ساکن ہے، اور (b) جب شے یکساں حرکت سے چل رہی ہے۔



شکل 3.3 ایک کار کا مقام ـ وقت گراف

ابعادی حرکت میں دو ہی سمتیں ہوتی ہیں (پچھلی سمت اور اگلی سمت، اوپری سمت اور نچلی سمت) جن میں شے حرکت کرتی ہے۔ ان دونوں سمتوں کو ہم آسانی کے لیے + اور – علامتوں سے ظاہر کرسکتے ہیں۔ مثال کے لیے اگر موٹر مقام O سے P پر پہنچتی ہے تو اس کا نقل (ہٹاؤ) ہے :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (+360\ \text{m}) - 0\ \text{m} = +360\ \text{m}$$

اس نقل کی عددی قدر 360 m ہے اور اس کی سمت x کی مثبت سمت میں ہے جسے + علامت کے ذریعے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس طرح موٹر کا P سے Q تک کا نقل: 240 m – 360 m = –120 m ہے۔ منفی نشان نقل کی سمت کو ظاہر کرتا ہے۔ لہٰذا، شے کی ایک ابعادی حرکت بیان کرنے کے لیے سمتی نشان کا استعمال ضروری نہیں ہوتا۔

نقل کی عددی قدر کسی شے کے ذریعے طے کی گئی راہ لمبائی کے برابر بھی ہوسکتی ہے اور نہیں بھی ہوسکتی ہے۔

مثال کے لیے اگر موٹر مقام O سے چل کر P پر پہنچ جائے تو (راہ لمبائی = +360 m) اور نقل = +360 m ہوگا۔ یہاں نقل کی عددی قدر (360 m)، راہ لمبائی (360 m) کے برابر ہے۔ لیکن اگر کار O سے چل کر P تک جائے اور Q پر واپس آجائے (360 m + 120 m) = +480 m راہ کی لمبائی ہوگی لیکن نقل = (+240 m) – (0 m) = +240 ہوگی۔ اس بار نقل کی قدر (240 m) موٹر کے ذریعے چلی گئی راہ لمبائی (480 m) کے برابر نہیں ہے (درحقیقت کم ہے)۔

نقل کی عددی قدر حرکت کے دوران کسی مدت کے لیے صفر بھی ہوسکتی ہے جب کہ اس کے متطابق راہ کی لمبائی **صفر نہیں** ہے۔ مثال کے لیے شکل 3.1 میں اگر موٹر O سے چل کر P تک جائے اور پھر O پر واپس آجائے تو موٹر کا آخری مقام ابتدائی مقام پر منطبق ہوجاتا ہے اور نقل صفر ہوجاتا ہے۔ لیکن کار کے اس پورے سفر کے لیے کل راہ لمبائی OP + PO = +360 m + 360 m = +720 m ہوگی۔

جیسا کہ آپ پہلے پڑھ چکے ہیں کہ کسی بھی شے کی حرکت کو مقام۔وقت گراف کے ذریعے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح کے گراف ایسے طاقت ور ذرائع ہوتے ہیں جن سے شے کی حرکت کے مختلف پہلوؤں کا اظہار اور تجزیہ آسانی سے کیا جاسکتا ہے۔ کسی خط مستقیم (جیسے x– محور) کے ساتھ کسی شے کی حرکت کے لیے وقت کے ساتھ صرف x– کوآرڈی نیٹ ہی تبدیل ہوتا ہے۔ اس طرح ہمیں x–t گراف حاصل ہوتا ہے۔ ہم سب سے پہلے ایک سادہ معاملے پر غور کریں گے، جس میں ایک شے ساکن ہے، مثال کے لیے، ایک موٹر x = 40 m پر واقع ہے۔ ایسی شے کی لیے مقام۔وقت (x-t) گراف وقت۔محور کے متوازی ایک خط مستقیم ہوتا ہے جیسا کہ شکل 3.2 (a) میں دکھایا گیا ہے۔

اگر کوئی شے یکساں وقفۂ وقت میں یکساں دوری طے کرتی ہے، تو اس شے کی حرکت **یکساں حرکت** کہلاتی ہے۔ اس طرح کی حرکت کا مقام۔وقت گراف شکل 3.2 (b) میں دکھایا گیا ہے۔

اب ہم اس موٹر کی حرکت پر غور کریں گے جو مبدا O سے $t = 0$ s پر ساکن حالت سے چلنا شروع کرتی ہے۔ اس کی چال بتدریج $t = 10$ s تک بڑھتی جاتی ہے۔ اس کے بعد وہ $t = 18$ s تک یکساں چال سے چلتی ہے۔ ٹھیک اسی وقت اس میں بریک لگایا جاتا ہے جس کے نتیجے میں وہ $t = 20$ s پر اور $x = 296$ m پر رک جاتی ہے۔ ایسی موٹر کا مقام۔وقت گراف تصویر 3.3 میں دکھایا گیا ہے۔ ہم اس گراف کی بات اسی باب میں آگے آنے والے حصہ میں دوبارہ کریں گے۔

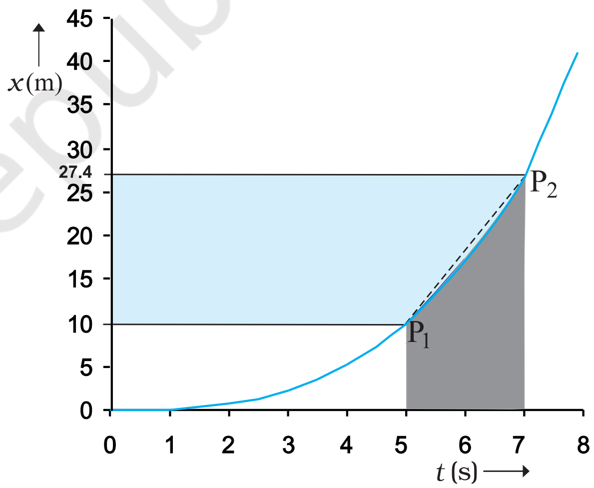
3.3 اوسط رفتار اور اوسط چال (Average Velocity and Average Speed)

جب کوئی شے حرکت میں ہوتی ہے تو وقت کے ساتھ ساتھ اس کے مقام میں تبدیلی ہوتی ہے۔ سوال پیدا ہوتا ہے کہ وقت کے ساتھ کتنی تیزی سے شے کے مقام میں تبدیلی ہوتی ہے اور یہ تبدیلی کس سمت میں واقع ہوتی ہے؟ اس کو بیان کرنے کے لیے ایک مقدار کی تعریف کرتے ہیں جسے **اوسط رفتار** کہا جاتا ہے۔ کسی شے کے مقام میں تبدیلی یا نقل (Δx) کو وقفۂ وقت (Δt) کے، جس میں وہ نقل ہوا ہے، ذریعے تقسیم کرنے پر اوسط رفتار حاصل ہوتی ہے۔ اسے V سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (3.1)$$

یہاں x_1، وقت t_1 پر اور x_2، وقت t_2 پر، شے کے مقامات کو ظاہر کرتے ہیں۔ یہاں رفتار کی علامت $(\bar{v})$ کے اوپر لگایا گیا خط، رفتار کی اوسط قدر کو ظاہر کرتا ہے۔ کسی مقدار کی اوسط قدر کو دکھانے کا یہ ایک معیاری طریقہ ہے۔ رفتار کی SI اکائی m/s یا ms^{-1} ہے، اگرچہ روز مرہ کے استعمال میں اس کے لیے $km\ h^{-1}$ کا بھی استعمال ہوتا ہے۔

نقل کی طرح اوسط رفتار بھی سمتیہ (vector) مقدار ہے۔ اس میں سمت اور مقدار دونوں شامل ہیں۔ لیکن جیسا کہ ہم پہلے واضح کر چکے ہیں، اگر شے ایک خط مستقیم میں حرکت کر رہی ہے تو اس کے سمتی پہلو کو + یا – نشانوں کے ذریعے ظاہر کر سکتے ہیں۔ اس لیے اس باب میں رفتار کے لیے سمتیہ نشانات کا استعمال کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔



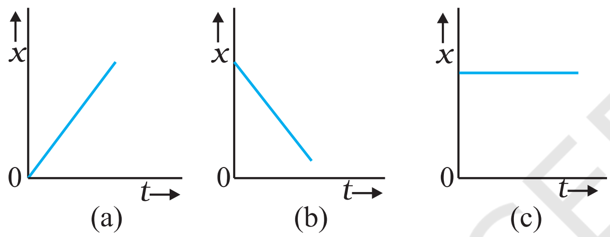
شکل 3.4 اوسط چال خط $P_2\ P_1$ کا ڈھلان ہے۔

شکل 3.3 میں دکھائی گئی موٹر کی حرکت ملاحظہ کریں۔ x-t گراف میں $t = 0\,s$ اور $t = 8\,s$ کے درمیان کے حصے کو بڑا کر کے شکل 3.4 میں دکھایا گیا ہے۔ جیسا کہ گرافی ترسیم (plot) سے ظاہر ہے $t = 5\,s$ اور $t = 7\,s$ کے درمیان وقفہ وقت میں کار کی اوسط رفتار ہوگی؛

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{(27.4 - 10.0)\text{m}}{(7 - 5)\text{s}} = 8.7\ ms^{-1}$$

جیومیٹریائی اعتبار سے یہ، آغازی مقام P_1 کو اختتامی مقام P_2 سے ملانے والے خط P_1P_2 کا ڈھلان (slope) ہے، جیسا کہ شکل 3.4 میں دکھایا گیا ہے۔

اوسط رفتار x مثبت یا منفی ہوسکتی ہے جو نقل کی علامت پر منحصر ہے۔ اگر نقل صفر ہوگا تو اوسط رفتار کی قدر بھی صفر ہوگی۔ مثبت اور منفی رفتار سے چلتی ہوئی شے کے لیے x-t گراف علی الترتیب شکل (a) 3.5 اور شکل (b) 3.5 میں دکھائے گئے ہیں اور ساکن شے کے لیے x-t گراف شکل (c) 3.5 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 3.5 مقام۔وقت گراف اس شے کے لیے جو (a) مثبت رفتار سے حرکت کررہی ہے۔ (b) منفی رفتار سے حرکت کررہی ہے اور (c) حالتِ سکون میں ہے۔

جس طور پر اوپر اوسط رفتار کی تعریف کی گئی ہے، اس میں صرف شے کا نقل شامل ہے۔ ہم یہ دیکھ چکے ہیں کہ نقل کی عددی قدر حقیقی راہ لمبائی سے مختلف ہوسکتی ہے۔ حقیقی راہ پر شے کی حرکت کی شرح بیان کرنے کے لیے ہم ایک دوسری مقدار کو متعارف کرتے ہیں جسے **اوسط چال** (average speed) کہتے ہیں۔

شے کے ذریعے سفر کی مدت میں طے کی گئی کل راہ کی لمبائی اور اس میں لگے وقت کے حاصل تقسیم کو **اوسط چال** کہتے ہیں۔

$$\text{اوسط چال} = \frac{\text{کل راہ کی لمبائی}}{\text{کل وقفہ وقت}} \qquad (3.2)$$

اوسط چال کی وہی اکائی $(m\ s^{-1})$ ہوتی ہے جو رفتار کی ہوتی ہے۔

لیکن اوسط چال سے یہ پتہ نہیں چل پاتا کہ شے کس سمت میں حرکت کر رہی ہے۔ اس لیے اوسط چال ہمیشہ مثبت ہی ہوتی ہے (جب کہ اوسط رفتار مثبت یا منفی کچھ بھی ہو سکتی ہے)۔ اگر شے ایک خط مستقیم پر حرکت کر رہی ہے اور صرف **ایک ہی سمت** میں چلتی ہے تو نقل کی عددی مقدار کل راہ کی لمبائی کے برابر ہوگی۔ ایسے حالات میں شے کی اوسط رفتار کی عددی قدر اس کی اوسط چال کے برابر ہوگی۔ لیکن یہ بات ہمیشہ صحیح نہیں ہوگی۔ یہ آپ مثال 3.1 میں دیکھیں گے۔

مثال 3.1 ایک موٹر خط مستقیم (مان لیجیے شکل 3.1 میں خط OP) پر حرکت کر رہی ہے۔ کار O سے چل کر 18 s میں P تک پہنچتی ہے، پھر 6 s میں مقام P سے مقام Q پر واپس ہو جاتی ہے۔ موٹر کی اوسط رفتار اور اوسط چال کا حساب لگایئے: جب (a) موٹر O سے P تک جاتی ہے، اور (b) جب وہ O سے P تک جا کر پھر Q پر واپس آجاتی ہے۔

جواب :

$$\text{اوسط رفتار} = \frac{\text{ہٹاؤ}}{\text{وقفہ وقت}}$$

$$\bar{v} = \frac{+360\text{ m}}{18\text{s}} = +20\text{ m s}^{-1}$$

$$\text{اوسط چال} = \frac{\text{راہ کی لمبائی}}{\text{وقفہ وقت}}$$

$$= \frac{360\text{ m}}{18\text{s}} = +20\text{ms}^{-1}$$

لہٰذا اس حالت میں اوسط چال کی قدر اوسط رفتار کی عددی قدر کے برابر ہے۔

اس صورت میں

$$\text{اوسط رفتار} = \frac{\text{نقل}}{\text{کل وقفہ}} = \frac{+240\text{ m}}{(18+6.0)\text{s}}$$

$$= +10\text{ m s}^{-1}$$

$$\text{اوسط چال} = \frac{\text{راہ کی لمبائی}}{\text{وقفہ وقت}} = \frac{\text{OP+PQ}}{\Delta t}$$

$$= \frac{(360+120)\text{ m}}{24\text{ s}} = 20\text{ m s}^{-1}$$

اس طرح اس معاملے میں اوسط چال، اوسط رفتار کی عددی قدر کے برابر نہیں ہے۔ اس کی وجہ موٹر کی حرکت کے دوران حرکت کی سمت میں تبدیلی ہے جس کے نتیجے میں راہ کی لمبائی نقل کی عددی قدر سے زیادہ ہے۔ اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ **شے کی چال عام طور پر رفتار کی عددی قدر سے زیادہ ہوتی ہے۔**

اگر مثال 3.1 میں کار مقام O سے P نقطے تک جائے اور یکساں وقفہ وقت میں یہ O مقام پر واپس آجائے تو کار کی اوسط چال 20 m s^{-1} ہوگی لیکن اس کی اوسط رفتار صفر ہوگی۔

3.4 ساعتی رفتار اور چال (INSTANTANEOUS VELOCITYAND SPEED)

اوسط رفتار سے ہمیں یہ پتہ چلتا ہے کہ کوئی شے کسی دیے گئے وقفۂ وقت میں کتنی تیز حرکت کر رہی ہے، لیکن اس سے یہ پتہ نہیں چل پاتا کہ اس وقفۂ وقت کی مختلف ساعتوں پر کتنی تیز حرکت کر رہی ہے۔ لہٰذا کسی ساعت t پر رفتار کے لیے ہم **ساعتی رفتار** یا صرف رفتار v کی تعریف کرتے ہیں۔

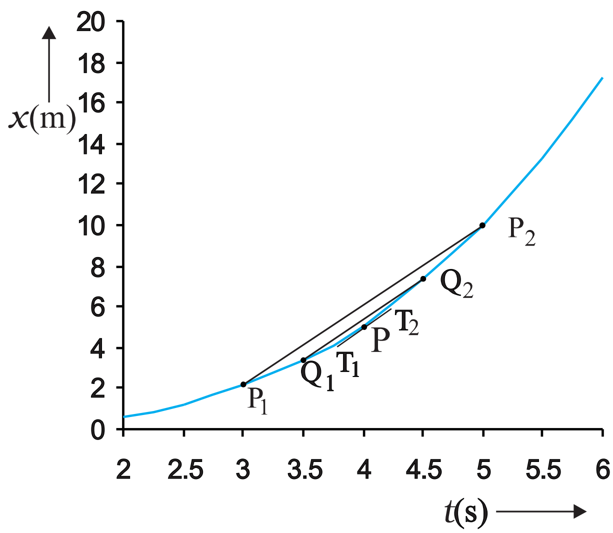
ایک ساعت پر رفتار (ساعتی رفتار) کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ یہ اوسط رفتار کی وہ حد ہے جب وقفہ وقت Δt لا انتہا خفیف (infinitesimally small) ہو۔ دوسرے الفاظ میں

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (3.3\text{ a})$$

$$= \frac{dx}{dt} \qquad (3.3\text{b})$$

یہاں علامت $\lim\limits_{\Delta t\to 0}$ سے مراد اس عمل سے ہے کہ اس کے دائیں جانب واقع مقدار (جیسے $\frac{\Delta x}{xt}$) کی وہ حد (limit) لی جائے جو Δt کی قدر کو صفر کی طرف ($\Delta t\to 0$) لینے سے حاصل ہوتی ہے۔ تفرقی احصاء کی زبان میں مساوات (3.3 a) میں دائیں طرف کی مقدار x کا t کی نسبت تفرقی ضریبہ (differential coefficient) ہے اور جس کو $\frac{dx}{dt}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ (ضمیمہ 3.1 دیکھیے) یہ اس ساعت پر، وقت کی نسبت سے، شے کے مقام کی تبدیلی کی شرح ہے۔

کسی ساعت پر شے کی رفتار حاصل کرنے کے لیے ہم مساوات (3.3a) کا استعمال کرسکتے ہیں۔ ایسا گرافی یا عددی طریقے سے کیا جاسکتا ہے۔ مان لیجیے کہ ہم موٹر کی حرکت، جو کہ شکل (3.3) میں پیش کی گئی ہے، کے لیے $t = 4\,s$ (نقطہ P) پر گرافی طریقے سے رفتار حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ حساب کی آسانی کے لیے اس شکل کو شکل 3.6 میں الگ پیمانہ منتخب کرکے دوبارہ کھینچا گیا ہے۔ پہلے ہم $t = 4\,s$ کو مرکز میں رکھ کر Δt کو 2s لیں۔



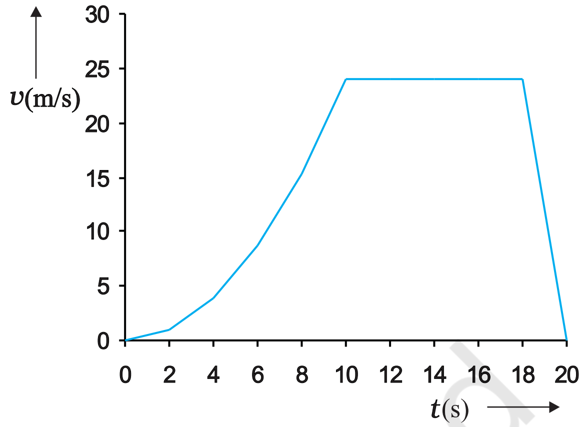
شکل 3.6 مقام۔وقت گراف سے رفتار معلوم کرنا۔ t = 4 s پر رفتار اس ساعت پر گراف کا خط مماس (tangent) ساعتی رفتار کو ظاہر کرتا ھے۔

اوسط رفتار کی تعریف کے مطابق خط مستقیم P_1P_2 (شکل 3.6) کی ڈھلان 3s سے 5s وقفے میں شے کی اوسط رفتار کو ظاہر کرے گی۔ اب ہم Δt کی قدر 2s سے گھٹا کر 1s کر دیتے ہیں تو P_1P_2 خط Q_1Q_2 ہوجاتا ہے اور اس کی ڈھلان 3.5 s سے 4.5s کے وقفہ میں اوسط رفتار کی قدر فراہم کرے گی۔ آخر کار حد $\Delta t\to 0$ میں خط P_1P_2 مقام وقت منحنی کے نقطہ P پر مماس (tangent) ہوجاتا ہے۔ اور اس طرح $t = 4\,s$ ساعت پر موٹر کی رفتار اس نقطے پر کھینچے گئے مماس کی ڈھلان کے برابر ہوگی۔ حالانکہ گرافک طریقے سے اسے پیش کرنا کچھ مشکل ہے تاہم اگر اس کے لیے ہم عددی طریقے کا استعمال کریں تو حدی عمل آسانی سے سمجھا جاسکتا ہے۔ شکل 3.6 میں کھینچے گئے گراف کے لیے $x = 0.08t^3$ ہے۔

جدول 3.1 میں $t = 4\,s$ کو مرکز میں رکھ کر، $\Delta t = 2.0\,s,\ 1.0s,\ 0.5s,\ 0.1s,\ 0.01s$ کے لیے $\Delta x/\Delta t$ کی قدروں کو دکھایا گیا ہے۔ دوسرے اور تیسرے کالم میں بالترتیب $t_1 = \frac{t-\Delta t}{2}$ اور $t_2 = \frac{t+\Delta t}{2}$ اور چوتھے اور پانچویں کالم میں ان کی x کے موافق قدروں یعنی $x(t_1) = 0.08\,t_1^3$ اور $x(t_2) = 0.08\,t_2^3$ کو دکھایا گیا ہے۔ چھٹے کالم میں فرق $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ کو اور آخری کالم میں Δx اور Δt کے تناسب کو ظاہر کیا گیا ہے۔ یہ تناسب پہلے کالم میں درج Δt کی الگ الگ قدروں کے مطابق اوسط رفتار کی قدر ہے۔

جدول 3.1 سے ظاہر ہے کہ جیسے جیسے ہم Δt کی قدر 2.0s سے گھٹاتے گھٹاتے 0.01 s کرتے ہیں تو اوسط رفتار آخر کار حدی قدر $3.84\ m\,s^{-1}$ کے برابر ہوجاتی ہے جو $t = 4\,s$ پر موٹر کی رفتار ہے یعنی $t = 4\,s$ پر $\frac{dx}{dt}$ کی قدر۔ اس طرح شکل 3.3 میں دکھائی گئی حرکت کے لیے ہم ہر ساعت پر موٹر کی رفتار نکال سکتے ہیں۔ اس مثال کے لیے وقت کے ساتھ رفتار میں تبدیلی شکل 3.7 میں دکھائی گئی ہے۔

درست ریاضیاتی عبارت موجود ہو۔ ایسی حالت میں دستیاب اعداد وشمار کا استعمال کرتے ہوئے وقفہ وقت Δt کو علی الترتیب گھٹاتے ہوئے $\Delta x/\Delta t$ کی قدر نکالتے جائیں گے اور آخر کار جدول 3.1 میں دکھائے گئے طریقے کے مطابق $\Delta x/\Delta t$ کی انتہائی قدر حاصل کرلیں گے یا دی گئی ریاضیاتی عبارت کے لیے تفرقی احصا کا استعمال کرکے حرکت کرتی ہوئی شے کی الگ الگ ساعتوں کے لیے $\frac{dx}{dt}$ کی تحسیب کرلیں گے، جیسا کہ مثال 3.2 میں بتایا گیا ہے۔



شکل 3.7 شکل 3.3 میں دکھائی گئی شے کی حرکت متطابق رفتار۔ وقت گراف

جدول 3.1 $t = 4$ s کے لیے $\Delta x/\Delta t$ کی انتہائی قدریں

$\Delta x/\Delta t$	x	$x(t_2)$	$x(t_1)$	t_2	t_1	Δt
(m s^{-1})	(m)	(m)	(m)	(s)	(s)	(s)
3.92	7.84	10.0	2.16	5	3	2.0
3.86	3.86	7.29	3.43	4.5	3.5	1.0
3.845	1.9225	6.14125	4.21875	4.25	3.75	0.5
3.8402	0.38402	5.31441	4.93039	4.05	3.95	0.1
3.8400	0.0384	5.139224	5.100824	4.005	3.995	0.01

یہاں یہ بات غور کرنے کی ہے کہ شے کی ساعتی رفتار نکالنے کے لیے گرافی طریقہ ہمیشہ سہل نہیں ہوتا۔ اس طریقے (گرافی طریقہ) میں ہم متحرک شے کے مقام۔ وقت گراف کو احتیاط سے کھینچتے ہیں اور Δt کو بتدریج کم کرتے ہوئے شے کی اوسط رفتار $(\bar{V})$ کا حساب لگاتے جاتے ہیں۔ الگ الگ ساعتوں پر شے کی رفتار نکالنا تب بہت آسان ہوجاتا ہے جب مختلف اوقات پر ہمارے پاس شے کے مقام کے کافی اعداد وشمار دستیاب ہوں یا شے کے مقام کے بہ طور وقت کے تفاعل کے لیے ہمارے پاس قطعی

مثال 3.2 x- محور پر متحرک شے کا مقام درج ذیل ریاضیاتی عبارت سے ظاہر کیا جاتا ہے : $x = a + b\ t^2$ یہاں $a = 8.5$ m, $b = 2.5$ ms^{-2} اور وقت کو سیکنڈ میں ظاہر کیا گیا ہے۔ $t = 0$ s اور $t = 2$ s ساعتوں پر شے کی رفتار کیا ہوگی؟ $t = 2$ s اور $t = 4$ s کے درمیان کے وقفہ وقت میں شے کی اوسط رفتار کیا ہوگی؟

جواب تفرقی احصا کی علامتوں میں، رفتار ہے

$$v = \frac{dx}{dx} = \frac{d}{dt}\left(a + bt^2\right) = 2b\,t = 5.0\ t \text{ m s}^{-1}$$

$t = 0$ s ساعت کے لیے $v = 0$ m s^{-1} اور $t = 2$ s ساعت کے لیے

$$v = 10 \text{ m s}^{-1}$$

$$\text{اوسط رفتار} \quad v = \frac{x(4.0) - x(2.0)}{4.0 - 2.0}$$

$$= \frac{a + 16b - a - 4b}{2.0} = 6.0 \times b$$

$$= 6 \times 2.5 = 15.0 \text{ m s}^{-1}$$

شکل 3.7 سے یہ ظاہر ہے کہ $t = 10$ s سے $t = 18$ s کے درمیان رفتار مستقل رہتی ہے۔ $t = 18$ s سے $t = 20$ s کے درمیان یہ یکساں طور پر کم ہوتی جاتی ہے جب کہ $t = 0$ s سے $t = 10$ s کے درمیان یہ بڑھتی جاتی ہے۔ غور کیجیے کہ یکساں حرکت میں ہر وقت (ساعتی) رفتار کی وہی قدر ہوتی ہے جو اوسط رفتار کی ہوتی ہے۔ **ساعتی چال** یا صرف چال حرکت کرتی ہوئی شے کی رفتار کی عددی قدر ہے۔ مثال کے لیے رفتار $+24.0$ ms^{-1} اور -24.0 ms^{-1} دونوں سے منسلک چال 24.0 ms^{-1} ہوگی۔ یہاں اس بات کو ذہن میں رکھنا ہے کہ جہاں کسی منتہائی (Finite) وقفۂ وقت میں شے کی اوسط چال اس کی اوسط رفتار کی عددی قدر کے یا تو برابر ہوتی ہے یا اس سے زیادہ ہوتی ہے، وہیں کسی ساعت پر شے کی ساعتی چال اس ساعت پر اس کی ساعتی رفتار کی عددی قدر کے برابر ہوتی ہے۔ ایسا کیوں ہوتا ہے؟

3.5 اسراع (ACCELERATION)

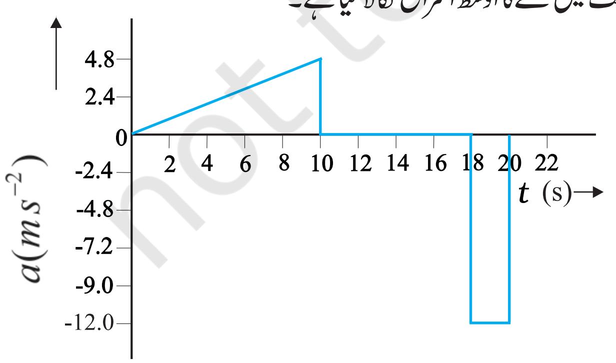
عمومی طور پر شے کی حرکت کے دوران اس کی رفتار میں تبدیلی ہوتی رہتی ہے۔ رفتار میں ہورہی اس تبدیلی کو کیسے ظاہر کریں؟ کیا رفتار میں ہورہی اس تبدیلی کو رفتار میں شرح تبدیلی **بہ نسبت دوری** یا **بہ نسبت وقت** ظاہر کریں؟ یہ مسئلہ گیلیلیو کے زمانے میں بھی تھا۔ گیلیلیو نے پہلے سوچا کہ رفتار میں ہورہی تبدیلی کی اس شرح کو دوری کے بہ نسبت ظاہر کیا جاسکتا ہے، لیکن جب انھوں نے آزادانہ طور سے گرتی ہوئی اور مائل مستوی (inclined plane) پر متحرک اشیا کی حرکت کا باقاعدہ مشاہدہ کیا تو انھوں نے پایا کہ وقت کی بہ نسبت رفتار کی تبدیلی شرح کی قدر آزادانہ گرتی ہوئی اشیا کے لیے حرکت کے دوران مستقل رہتی ہے جب کہ دوری کی بہ نسبت شے کی رفتار کی تبدیلی مستقل نہیں رہتی بلکہ جیسے جیسے گرتی ہوئی شے کی دوری بڑھتی جاتی ہے ویسے ویسے یہ قدر گھٹتی جاتی ہے۔ اس مطالعہ نے اسراع کے موجودہ تصور کو پیدا کیا جس کے مطابق اسراع کو وقت کی مناسبت سے رفتار کی شرحِ تبدیلی کی شکل میں متعارف کرتے ہیں۔

جب کسی شے کی رفتار وقت کے ساتھ بدلتی ہے تو ہم کہتے ہیں کہ اس میں اسراع ہورہا ہے۔ رفتار میں تبدیلی اور اس کے متطابق وقفۂ وقت کی نسبت کو ہم اوسط اسراع کہتے ہیں۔ اسے $\bar{a}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (3.4)$$

یہاں t_1، t_2 ساعتوں پر شے کی ساعتی رفتار یا رفتار علی الترتیب v_1 اور v_2 ہے۔ یہ اکائی وقت میں رفتار میں اوسط تبدیلی ہوتی ہے۔ اسراع کی SI اکائی ms^{-2} ہے۔

رفتار۔ وقت (v-t) گراف میں اوسط اسراع اس خط مستقیم کے ڈھلان کے برابر ہوتا ہے جو نقطہ (v_2, t_2) کو نقطہ (v_1, t_1) سے جوڑتا ہے۔ نیچے کی مثال میں شکل 3.7 میں دکھائی گئی حرکت کے الگ الگ وقفۂ وقت میں شے کا اوسط اسراع نکالا گیا ہے۔



شکل 3.8 شکل 3.3 میں دکھائی گئی حرکت کے لیے، وقت کے تفاعل کی شکل میں شے کا اسراع

$$0\,s-10\,s,\ \bar{a} = \frac{(24-0)\,m\,s^{-1}}{(10-0)\,s} = 2.4\,m\,s^{-2}$$

$$10\,s-18\,s,\ \bar{a} = \frac{(24-24)\,m\,s^{-1}}{(18-10)\,s} = 0\,m\,s^{-2}$$

$$18\,s-20\,s,\ \bar{a} = \frac{(0-24)\,m\,s^{-1}}{(20-18)\,s} = -12\,m\,s^{-2}$$

ساعتی اسراع : جس طرح ہم نے پہلے ساعتی رفتار کی تعریف کی ہے، اسی طرح ہم ساعتی اسراع کی بھی تعریف کرتے ہیں۔ شے کے ساعتی اسراع کو a سے ظاہر کرتے ہیں یعنی

$$a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \qquad (3.5)$$

کسی ساعت پر اسراع اس ساعت پر v-t منحنی پر کھینچے گئے مماس کے ڈھلان کے برابر ہوتا ہے۔شکل 3.7 میں دکھائے گئے v–t منحنی میں ہر ایک ساعت کے لیے اسراع حاصل کرسکتے ہیں۔نتیجتاً دستیاب a–t منحنی شکل 3.8 میں دکھایا گیا ہے۔شکل سے ظاہر ہے کہ 0 s سے 10 s کی مدت میں اسراع غیر یکساں ہے۔ 10 s – 18 s کے درمیان یہ صفر ہے جب کہ 18 s اور 20 s کے درمیان یہ مستقل ہے اور اس کی قدر $-12\ ms^{-2}$ ہے۔ جب اسراع یکساں ہوتا ہے تو یہ ظاہر ہے کہ وہ اس مدت میں اوسط اسراع کے برابر ہوتا ہے۔

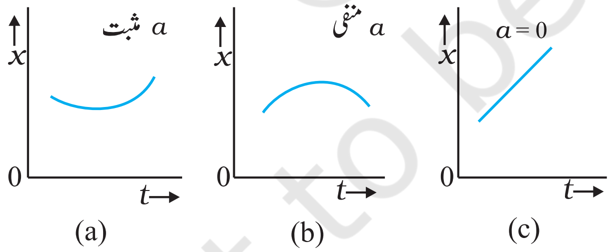
چونکہ رفتار ایک سمتی مقدار ہے جس میں سمت اور عددی قدر دونوں ہوتے ہیں اس لیے رفتار کی تبدیلی میں ان میں سے کوئی ایک یا دونوں عوامل شامل ہوسکتے ہیں۔ لہٰذا اسراع یا تو چال (عددی قدر) میں تبدیلی، سمت میں تبدیلی یا ان دونوں میں تبدیلی سے واقع ہوتا ہے۔ رفتار کی طرح ہی اسراع بھی مثبت، منفی یا صفر ہوسکتا ہے۔ اسی طرح کے اسراع سے متعلق–مقام وقت گرافوں کو شکلوں 3.9 (a)، 3.9 (b) اور 3.9 (c) میں دکھایا گیا ہے۔شکلوں سے ظاہر ہے کہ مثبت اسراع کے لیے x–t گراف فرازی (upward) ہے لیکن منفی اسراع کے لیے گراف نشیبی (downward) ہے۔صفر اسراع کے لیے x–t گراف ایک خط مستقیم ہے۔ مشق کے لیے شکل 3.3 میں دکھائے گئے منحنی کے ان تینوں حصوں کو پہچانیے جن کے لیے اسراع مثبت، منفی یا صفر ہے۔

اگرچہ اسراع وقت کے ساتھ ساتھ بدل سکتا ہے، لیکن آسانی کے لیے اس باب میں حرکت سے متعلق ہمارا مطالعہ محض مستقل اسراع تک ہی محدود رہے گا۔ ایسی حالت میں اوسط اسراع a کی قدر حرکت کی مدت میں مستقل اسراع کی قدر کے برابر ہوگی۔ اگر ساعت $t = 0$ پر شے کی رفتار v_0 اور t ساعت پر اس کی رفتار v ہو، تو اسراع

$$a = \bar{a} = \frac{v-v_0}{t-0}$$

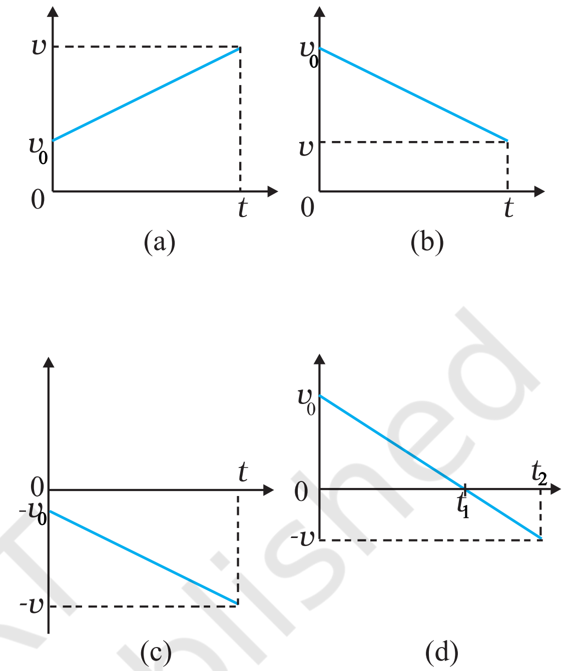
یا

$$v = v_0 + at \qquad (3.6)$$



شکل 3.9 ایسی حرکت کے لیے مقام ۔ وقت گراف جس کے لیے (a) اسراع مثبت ہے، (b) اسراع منفی ہے، اور (c) اسراع صفر ہے۔

اب ہم یہ دیکھیں گے کہ کچھ سادہ مثالوں میں رفتار۔ وقت گراف کیسا دکھائی دیتا ہے۔شکل 3.10 میں مستقل اسراع کے لیے چار الگ الگ صورتوں میں $v - t$ گراف دکھائے گئے ہیں:



شکل 3.10 مستقل اسراع کے ساتھ حرکت کے رفتار۔وقت گراف (a) مثبت اسراع سے مثبت سمت میں حرکت، (b) منفی اسراع سے مثبت سمت میں حرکت، (c) منفی اسراع سے منفی سمت میں حرکت، (d) منفی اسراع کے ساتھ شے کی حرکت جو وقت t_1 پر سمت بدلتی ھے۔ 0 سے t_1 وقفۂ وقت میں یہ مثبت x سمت میں حرکت کرتی ھے جب کہ t_1 اور t_2 کے درمیان وہ مخالف سمت میں متحرك ھے۔

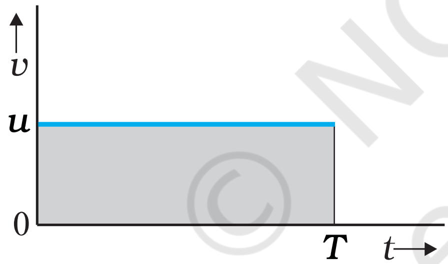
(a) کوئی شے مثبت سمت میں مثبت اسراع سے متحرک ہے۔مثال کے لیےشکل 3.3 میں $t = 0\,s$ سے $t = 10\,s$ کے درمیان کی مدت میں کار کی حرکت۔

(b) کوئی شے مثبت سمت میں منفی اسراع سے متحرک ہے۔مثال کے لیے،شکل 3.3 میں $t = 18\,s$ سے $t = 20\,s$ کے درمیان کی مدت میں کار کی حرکت۔

(c) کوئی شےمنفی سمت میں منفی اسراع سے متحرک ہے۔مثال کے لیے شکل 3.1 میں O سے x کی منفی سمت میں اسراع ہوتی کار۔

(d) کوئی شے پہلے t_1 وقت تک مثبت سمت میں چلتی ہے اور پھر واپس مڑتی ہے اور منفی سمت میں یکساں منفی اسراع کے ساتھ متحرک ہے۔ مثال کے لیے شکل 3.1 میں موٹر کا t_1 وقت تک O سے نقطہ Q تک گھٹتی ہوئی رفتار کے ساتھ جانا، پھر مڑ کر اسی منفی اسراع کے ساتھ t_2 وقت تک چلتے رہنا۔

کسی متحرک شے کے رفتار۔ وقت گراف کی ایک اہم خصوصیت ہے کہ $v-t$ گراف کے تحت آنے والا رقبہ **متعین وقفۂ وقت میں شے کے نقل کو ظاہر کرتا ہے**۔ اس بیان کے عمومی ثبوت کے لیے تفرقی احصا کی ضرورت پڑتی ہے۔ تاہم ایک سادہ صورت کے لیے جس میں شے مستقل رفتار u سے حرکت کررہی ہو ہم اسے ثابت کرسکتے ہیں۔ اس شے کا رفتار–وقت گراف شکل 3.11 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 3.11 $v-t$ گراف کے تحت آنے والا رقبہ شے کے ذریعے متعین وقفے میں نقل کو ظاہر کرتا ھے۔

شکل میں $v-t$ منحنی، وقت - محور کے متوازی ایک خط مستقیم ہے، اور $t = 0$ سے $t = T$ کے درمیان اس خط کے تحت آنے والا رقبہ اس مستطیل کے رقبے کے برابر ہے جس کی اونچائی u اور قاعدہ T ہے۔ لہٰذا $u\times T=uT$ = رقبہ، جو اس وقت میں شے کا نقل ہے۔کوئی رقبہ دوری کے برابر کیسے ہوسکتا ہے؟ غور کیجیے! دونوں محوروں کے ساتھ جو مقداریں دی گئی ہیں اگر آپ ان کے ابعاد (dimensions) پر غور کریں گے تو آپ کو اس کا جواب مل جائے گا۔

غور کیجیے کہ اس باب میں متعدد مقامات پر کھینچے گئے ۔ $x-t,$

$t-v$ اور $t-a$ گرافوں میں کچھ نقاط پر تیز بل (موڑ) ہیں۔ اس سے مراد یہ ہے کہ دیے گئے تفاعل ان نقاط پر تفرق پذیر نہیں ہیں لیکن کسی حقیقی صورتِ حال میں سبھی گراف ہموار منحنی (smooth curve) ہوں گے اوران کے سبھی نقاط پر تفاعل تفرق پذیر ہوگا۔

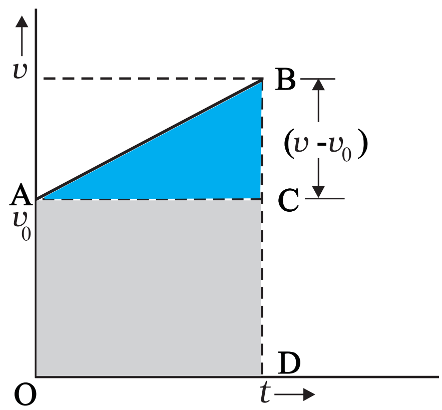
طبیعی طور پر اس کا مطلب ہے کہ اسراع اور رفتار کی قدریں کسی لمحہ ایک لخت نہیں تبدیل ہوسکتیں۔ تبدیلیاں ہمیشہ لگاتار ہوں گی۔

3.6 یکساں اسراع سے متحرک شے کی مجرد حرکیاتی مساواتیں (KINEMATIC EQUATIONS FOR UNIFORMLY ACCELERATED MOTION)

اب ہم یکساں اسراع 'a' سے متحرک شے کے لیے کچھ سادہ مساواتیں اخذ کر سکتے ہیں جو پانچوں مقداروں کو کسی طرح سے ایک دوسرے سے جوڑتی ہیں۔ یہ مقداریں ہیں: نقل (x)، لیا گیا وقت (t)، $t = 0$ وقت پر شے کی ابتدائی رفتار (v_0)، اختتامی رفتار (v)، اور اسراع (a)۔ ہم پہلے ہی v_0 اور v کے درمیان ایک مساوات (3.6) حاصل کر چکے ہیں جس میں یکساں اسراع a اور وقت t شامل ہیں۔ یہ مساوات ہے:

$$v = v_0 + at \qquad (3.6)$$

اس تعلق کو شکل 3.12 میں گرافی طور پر پیش کیا گیا ہے۔



شکل 3.12 یکساں اسراع سے متحرک شے کے لیے $v-t$ منحنی کے تحت آنے والا رقبہ

اس منحنی کے تحت آنے والا رقبہ:

مثلث ABC کا رقبہ + مستطیل OACD کا رقبہ = 0 تا t وقت کے درمیان کا رقبہ

$$= \frac{1}{2}(v-v_0)\,t + v_0 t$$

جیسا کہ پچھلے حصّے میں واضح کیا جاچکا ہے، $v-t$ گراف کے تحت آنے والا رقبہ شے کا نقل ہوتا ہے، لہٰذا شے کا نقل x ہوگا:

$$x = \frac{1}{2}(v-v_0)t + v_0 t \qquad (3.7)$$

لیکن $$v - v_0 = at$$

اس لیے $$x = \frac{1}{2}a\,t^2 + v_0 t$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (3.8)$$

مساوات (3.7) درج ذیل طور پر لکھی جاسکتی ہے

$$x = \frac{v+v_0}{2}t = \bar{v}\,t \qquad (3.9\text{ a})$$

$$\bar{v} = \frac{v+v_0}{2}$$ (صرف مستقل اسراع کے لیے) (3.9 b)

مساوات (3.9a) اور (3.9b) سے مراد ہے کہ شے میں نقل x، اوسط رفتار $\bar{v}$ سے ہوا ہے جو ابتدائی اور اختتامی رفتاروں کے حسابی اوسط کے برابر ہوتی ہے۔

مساوات (3.6) سے: $t = (v-v_0)/a$، یہ قدر مساوات (3.9 a) میں رکھنے پر

$$x = \bar{v}\,t = \frac{v+v_0}{2}\cdot\frac{v-v_0}{a} = \frac{v^2-v_0^2}{2a}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \qquad (3.10)$$

اگر ہم مساوات (3.6) سے t کی قدر مساوات (3.8) میں رکھ دیں تو بھی درج بالا مساوات کو حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح ہم نے پانچ مقداروں v_0, v, a, t اور x کے درمیان رشتہ قائم کرنے والی تین اہم مساواتیں حاصل کی ہیں۔

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \qquad (3.11a)$$

یہ سبھی مستقل اسراع والی مستقیم حرکت کی مجرد حرکیاتی مساوات ہیں۔

مساواتوں کے سیٹ(3.11a) میں جو مساواتیں دی گئی ہیں، ان کو اخذ کرنے کے لیے ہم نے مانا ہے کہ ساعت $t = 0$ پر شے کا مقام 0 ہے، یعنی $(x = 0)$ لیکن اگر ہم یہ مان لیں کہ ساعت $t = 0$ پر شے کا مقام صفر نہ ہو بلکہ غیر صفر، یعنی x_0 ہو تو مساوات (3.11a) درج ذیل ترمیم شدہ مساوات میں منتقل ہو جائے گی (اگر ہم x کے مقام پر $x - x_0$ لکھیں):

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (3.11\,b)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad (3.11c)$$

مثال 3.3 یکساں اسراع کے لئے حرکیاتی مساوات بذریعہ احصاء (calculas) معلوم کیجیے۔

جواب: اسراع کی تعریف سے لکھ سکتے ہیں

$$a = \frac{dv}{dt}$$

یا

$$dv = a\,dt$$

دونوں جانب تکمل (Integrate) کرنے پر

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\,dt$$

$$= a\int_0^t dt \qquad \text{(a ایک مستقلہ ہے)}$$

$$v - v_0 = at$$

$$v = v_0 + at$$

مزید

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = v\,dt$$

دونوں جانب تکمل کرنے پر

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (v_0 + at)\,dt$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}a t^2$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a t^2$$

ہم لکھ سکتے ہیں

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

یا

$$v\,dv = a\,dx$$

دونوں جانب تکمل کرنے پر

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a\,dx$$

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = a(x - x_0)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

یہ طریقہ یوں بھی اہمیت کا حامل ہے کہ اس کو غیر یکساں اسراع والی حرکت میں بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔

اب ہم درج بالا مساوات کا استعمال کچھ اہم مثالوں میں کریں گے۔

مثال 3.4 کسی کثیر منزلہ عمارت کی اوپری چھت سے کوئی گیند $20\ m\ s^{-1}$ کی رفتار سے اوپر کی جانب عمودی طور پر اچھالی گئی ہے۔ جس نقطے سے گیند پھینکی گئی ہے زمین سے اس کی اونچائی $25.0\ m$ ہے۔ (a) گیند کتنی اوپر جائے گی؟ اور (b) گیند زمین سے ٹکرانے سے پہلے کتنا وقت لے گی؟ $g = 10\ m\ s^{-2}$ لیجیے۔

جواب (a) y-محور کو جیسا شکل 3.13 میں دکھایا گیا ہے، عمودی سمت میں اوپر کی طرف اس طرح منتخب کرتے ہیں کہ محور کا صفر زمین پر ہو۔

اب

$$v_0 = +20\ m\ s^{-1}$$

$$a = -g = -10\ m\ s^{-2}$$

$$v = 0\ m\ s^{-1}$$

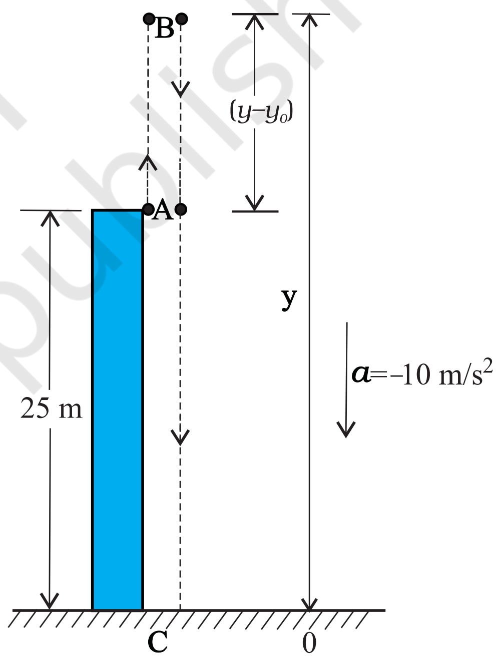
اگر پھینکے گئے نقطے سے گیند h اونچائی تک جاتی ہے تو مساوات $v^2 = v_0^2 + 2\,(y-y_0)$ سے ہمیں درج ذیل نتیجہ حاصل ہوگا :

$$0 = (20)^2 + 2\,(-10)\,(y-y_0)$$

حل کرنے پر

$$(y-y_0) = 20 \text{ m}$$

(b) اس حصے کا جواب ہم دو طرح سے حاصل کر سکتے ہیں۔ ان دونوں طریقوں کو دھیان سے سمجھیں۔



شکل 3.13

پہلا طریقہ : اس میں، ہم گیند کے راستے کو دو حصوں میں تقسیم کرتے ہیں: اوپر کی طرف حرکت (A تا B) اور نیچے کی طرف حرکت (B تا C) اور ان کے مطابق وقت t_1 اور t_2 نکال لیتے ہیں۔ چونکہ B پر رفتار صفر ہے اس لیے

$$v = v_o + at$$

یا $0 = 20 - 10t_1$

$t_1 = 2 \text{ s}$

اس وقت میں گیند نقطہ A سے B پر پہنچتی ہے۔ B، یعنی از حد اونچائی سے گیند کششِ ارضی کے سبب اسراع کے تحت آزادانہ طور پر نیچے کی طرف گرتی ہے۔ چونکہ گیند y کی منفی سمت میں چلتی ہے، اس لیے درج ذیل مساوات کا استعمال کر کے ہم t_2 کی قدر نکال لیتے ہیں:

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

ہمیں $y_0 = 45 \text{ m}$ دیا ہے اور $v_0 = 0,\ a = -g = -10 \text{ m s}^{-2}$

$$0 = 45 + (1/2) - (10)\,t_2^2$$

لہٰذا $t_2 = 3 \text{ s}$

اس لیے زمین پر ٹکرانے سے پہلے گیند کے ذریعے لیا گیا کل وقت $t_1 + t_2 = 2 \text{ s} + 3 \text{ s} = 5 \text{ s}$ ہوگا۔

دوسرا طریقہ : بنیادی نقطے کے ساتھ گیند کے ابتدائی اور آخری مقامات کے کوارڈی نیٹس کو درج ذیل مساوات میں استعمال کر کے ہم گیند کے ذریعے لیے گئے کل وقت کا حساب کر سکتے ہیں :

$$y = y_o + v_o t + 1/2\ at^2$$

اب $y_o = 25 \text{ m} \qquad y = 0 \text{ m}$

$v_o = 20 \text{ m s}^{-1} \qquad a = -10 \text{ m s}^{-2} \quad t = ?$

$$0 = 25 + 20t + (½)\,(-10)\,t^2$$

یا $5t^2 - 20t - 25 = 0$

t کے لیے اگر اس دو درجی مساوات کو حل کریں تو

$$t = 5 \text{ s}$$

غور کیجیے کہ دوسرا طریقہ پہلے سے بہتر ہے کیونکہ اس میں ہمیں حرکت کی راہ کی فکر نہیں کرنی ہے کیونکہ شے مستقل اسراع سے متحرک ہے۔

مثـــال 3.5 آزادانہ گرنا: آزادی سے نیچے کی طرف گرتی ہوئی شے کی حرکت بیان کیجیے۔ ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کیجیے۔

جواب اگر زمین کی سطح سے تھوڑی اونچائی پر سے کوئی شے چھوڑ دی جائے تو وہ ارضی کشش کے سبب زمین کی طرف اسراع کرے گی۔ اس طرح کی قوت کے بارے میں ہم آٹھویں باب میں تفصیل سے پڑھیں گے۔ مادی کشش اسراع (کشش ارضی کے سبب اسراع) کو ہم g سے ظاہر کرتے ہیں۔ اگر شے پر ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کریں تو ہم کہیں گے کہ شے کا **گرنا آزادانہ** ہو رہا ہے۔ اگر گرتی ہوئی شے کے ذریعے طے کی گئی دوری زمین کے نصف قطر کے مقابلے میں بہت کم ہے تو ہم g کی قدر مستقل، یعنی $9.8\ m\ s^{-2}$ لے سکتے ہیں۔ اس طرح آزادانہ گرنا یکساں اسراع والی حرکت کی ایک مثال ہے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ حرکت کی سمت y ہے زیادہ درست ہوگا اگر ہم یہ مانیں کہ شے کی حرکت $(-y)$ سمت میں ہے، کیونکہ اوپر کی سمت کو ہم مثبت مانتے ہیں۔ مادی کشش اسراع کی سمت ہمیشہ نیچے کی جانب ہوتی ہے، اس لیے اسے ہم منفی سمت میں لیتے ہیں۔

لہٰذا، $a = -g = -\ 9.8\ m\ s^{-2}$

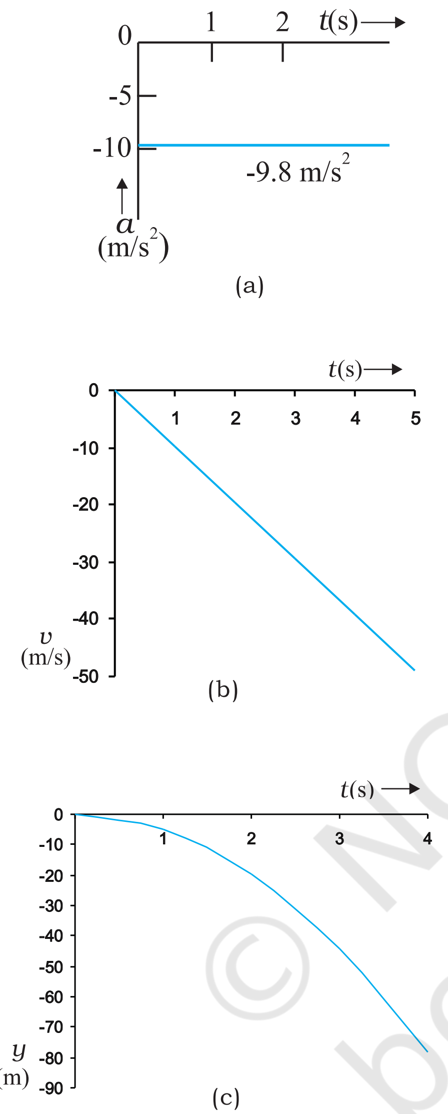
شے کو $y = 0$ پر حالتِ سکون سے چھوڑا گیا ہے۔ اس لیے $v_0 = 0$ اور حرکت کی مساواتیں ہو جاتی ہیں:

$$v = 0 - gt = -\ 9.8t \qquad m\ s^{-1}$$

$$y = 0 - (1/2)gt^2 = -4.9t^2 \qquad m$$

$$v^2 = 0 - 2gy = -\ 19.6y \qquad m^2\ s^{-2}$$

یہ مساواتیں شے کی رفتار، اور اس کے ذریعے طے کی گئی دوری کو وقت کے تفاعل کے طور پر اور دوری کے لحاظ سے اس کی رفتار میں تغیر کو ظاہر کرتی ہیں۔ وقت کے مطابق اسراع، رفتار اور دوری کے تغیر کو شکل 3.4 (a)، (b) اور (c) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 3.14 آزادانہ گرنے میں شے کی حرکت (a) وقت کے ساتھ شے کے اسراع میں تبدیلی، (b) وقت کے ساتھ شے کی رفتار میں تبدیلی، (c) وقت کے ساتھ شے کے مقام میں تبدیلی۔

مثال 3.6 گیلیلیو کا طاق اعداد کا قانون: اس قانون کے مطابق کی حالتِ سکون سے گرتی ہوئی کسی شے کے ذریعے یکساں وقفہٗ وقت میں طے کی گئی دوریاں ایک دوسرے سے اسی نسبت میں ہوتی ہیں جس نسبت میں ایک سے شروع ہونے والے طاق اعداد۔ [یعنی،.... 7 :5 :3 :1] اس بیان کو ثابت کیجیے۔

جواب ہم حالتِ سکون سے گرتی ہوئی کسی شے کے وقفہ وقت کو بہت سے یکساں وقفۂ وقت τ میں تقسیم کر لیتے ہیں اور علی الترتیب ان وقفہ وقت میں شے کے ذریعے طے کی گئی دوری نکالتے جاتے ہیں۔ اس حالت میں شے کی ابتدائی رفتار صفر ہے، لہٰذا

$$y = -\frac{1}{2}\,g t^2$$

اس مساوات کی مدد سے ہم مختلف وقفہ وقت $0, \tau, 2\tau, 3\tau \ldots$ میں شے کے مقامات کا حساب لگا سکتے ہیں جنہیں جدول 3.2 کے دوسرے کالم میں دکھایا گیا ہے۔ اگر پہلے وقفہ وقت τ پر شے کا مقام– کوآرڈی نیٹ y_0 لیں $y_0 = (-1/2)\,g\tau^2$ تو آگے کے وقفہ وقت کے بعد شے کے مقامات کو y_0 کی اکائی میں کالم تین میں دیئے گئے طریقے سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ متواتر وقفہ وقت (ہر ایک τ) میں طے کی گئی دوریوں کو کالم چار میں ظاہر کیا گیا ہے۔ ظاہر ہے کہ علی الترتیب وقفہ وقت میں شے کے ذریعے طے کی گئی دوریاں 1:3:5:7:9:11.. سادہ نسبت میں ہیں جیسا کہ آخری کالم میں دکھایا گیا ہے۔ اس قانون کو سب سے پہلے گیلیلیو گیلیلی (1564 تا 1642) نے وضع کیا تھا جنھوں نے آزادانہ گرتی ہوئی شے کا پہلی بار باقاعدہ مقداری مطالعہ کیا تھا۔

مثال 3.7 گاڑیوں کی رُکنے کی دوری: جب متحرک گاڑی میں بریک کا لگایا جاتا ہے تو بریک لگانے کے بعد رکنے سے پہلے اس کے ذریعے طے کی گئی دوری کو رکنے کی دوری کہتے ہیں۔ سڑک پر حفاظت کے سلسلے میں یہ ایک اہم بات ہے اور یہ دوری ابتدائی رفتار (v_0) پر اور بریک لگانے کی صلاحیت یا بریک لگائے جانے کے نتیجے میں گاڑی میں پیدا ہونے والے منفی اسراع یا رفتار کی کمی $(-a)$ پر منحصر ہوتی ہے۔ کسی گاڑی کی رکنے کی دوری کے لیے v_0 اور a کی اصطلاح میں عبارت اخذ کیجیے۔

جواب مان لیجیے گاڑی بریک لگانے کے بعد رکنے سے پہلے d_s دوری طے کر چکی ہے۔ حرکت کی مساوات $v^2 = v_0^2 + 2ax$ میں اختتامی رفتار $v = 0$ ہو تو رُکنے کی دوری

$$d_s = \frac{-v_0^2}{2a}$$

ہوگی۔ لہٰذا رکنے کی دُوری گاڑی کی ابتدائی رفتار کے مربع کے متناسب ہوتی ہے۔ اگر ابتدائی رفتار کو دوگنا کر دیا جائے تو اسی ابطا رُکنے کی دوری چار گنی ہو جائے گی۔ (اسی منفی اسراع کے لیے)

جدول 3.2

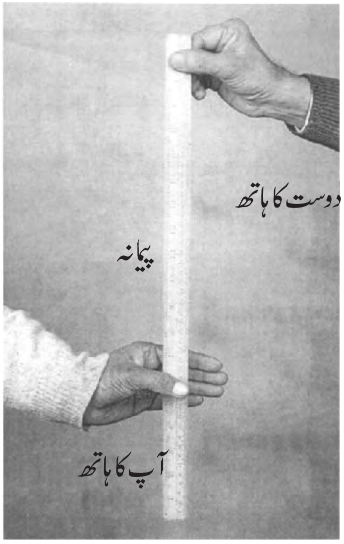
t	y	y کی قدر، y_0 کے درجوں میں، $y_0\,(=(-1/2)\,g\tau^2)$	متواتر وقفوں میں طے کی گئی دوری	طے کی گئی دوری کی نسبت
0	0	0		
τ	$-(1/2)\,g\tau^2$	y_0	y_0	1
2τ	$-4(1/2)\,g\tau^2$	$4y_0$	$3y_0$	3
3τ	$-9(1/2)\,g\tau^2$	$9y_0$	$5y_0$	5
4τ	$-16(1/2)\,g\tau^2$	$16y_0$	$7y_0$	7
5τ	$-25(1/2)\,g\tau^2$	$25y_0$	$9y_0$	9
6τ	$-36(1/2)\,g\tau^2$	$36y_0$	$11y_0$	11

کار کے ایک خصوصی ماڈل کے لیے مختلف رفتاروں 11، 15، 20 اور $25\,ms^{-1}$ کے مطابق رکنے کی دوری 10m, 20m, 34m اور 50m پائی گئی ہے جو مذکورہ بالا فارمولے سے حاصل قدروں سے تقریباً ہم آہنگ ہے۔

کچھ جگہوں، جیسے کسی اسکول کے قریب، گاڑیوں کی چال کی حد کے تعین میں رُکنے کی دوری ایک اہم جُز ہوتا ہے۔

مثال 3.8 ردِّعمل وقفہ: کبھی کبھی ہمارے سامنے ایسے حالات پیدا ہوجاتے ہیں کہ ہم سے فوری کاروائی کی توقع کی جاتی ہے لیکن ہمارے اصل جوابی عمل سے پہلے کچھ وقت لگ جاتا ہے۔ کسی شخص کو مشاہدہ کرنے، اس کے بارے میں سوچنے اور کارروائی کرنے میں لگنے والا وقت ردِّعمل وقفہ ہے۔ مثال کے لیے، مان لیجیے کہ کوئی شخص سڑک پر گاڑی چلا رہا ہے اور اچانک راستے میں ایک لڑکا سامنے آجاتا ہے تو کار میں تیزی سے بریک لگانے سے پہلے اُس شخص کو جو وقت لگ جاتا ہے، اسے ردِّعمل وقفہ کہیں گے۔ ردِّعمل وقفہ حالات کی پیچیدگی اور فرد خاص پر منحصر ہوتا ہے۔

آپ اپنے ردِّعمل وقفہ کی پیمائش ایک سادہ تجربے کے ذریعے کرسکتے ہیں۔ آپ ایک دوست کو ایک پیمانہ (رولر) دیں اور اس سے کہیں کہ وہ آپ کے ہاتھ کے انگوٹھے اور انگشت شہادت کے درمیان کی خالی جگہ سے اس پیمانہ کو عمودی سمت میں گرادے (شکل 3.15)۔ جیسے ہی پیمانہ کو چھوڑا جائے آپ اسے پکڑلیں۔ ان دونوں واقعات (پیمانہ کو چھوڑنے اور آپ کے ذریعے پکڑنے) کے درمیان پیمانہ کے ذریعے طے کی گئی دوری d کی پیمائش کرلیں۔ کسی خاص مثال میں پایا گیا: d = 21.0 cm تو ردِّعمل وقفہ کا شمار کیجیے۔



شکل 3.15 ردعمل وقفہ کی پیمائش

جواب پیمانہ آزادانہ طور پر گرتا ہے، لہٰذا، $v_0 = 0,\ g = -9.8\ ms^{-2}$

ردِّعمل دور t_r اور طے کی گئی دوری (d) میں رشتہ ہے:

$$d = -\frac{1}{2} g t_r^2$$

یا

$$t_r = \sqrt{\frac{2d}{g}}\ s$$

دیا ہے d = 21.0 cm، اس لیے ردِّعمل وقفہ

$$t_r = \sqrt{\frac{2 \times 0.21}{9.8}}\, s \cong 0.2\, s.$$

3.7 نسبتی رفتار (RELATIVE VELOCITY)

آپ کو ریل گاڑی میں سفر کرنے اور سفر کے دوران یہ دیکھنے کا موقع ملا ہوگا کہ ایک دوسری ریل گاڑی جو آپ کی گاڑی کی ہی سمت میں متحرک ہے، آپ کی گاڑی سے آگے نکل جاتی ہے۔ چونکہ یہ ریل گاڑی آپ سے آگے نکل جاتی ہے اس لیے یہ آپ کی ریل گاڑی سے یقیناً زیادہ تیز چل رہی ہے۔ لیکن ایک شخص جو زمین پر کھڑا دونوں ریل گاڑیوں کو چلتا دیکھ رہا ہے وہ

اس سے آگے نکل جانے والی گاڑی کو جتنا تیز چلتا محسوس کرے گا، آپ اس کے مقابلے میں اسے آہستہ چلتا ہوا محسوس کریں گے۔ اگر زمین کی نسبت دونوں ریل گاڑیوں کی رفتار یکساں ہے تو آپ کو ایسا لگے گا کہ دوسری گاڑی بالکل بھی نہیں چل رہی ہے۔ ان تجربات کو سمجھنے کے لیے اب ہم نسبتی رفتار کے تصور کو پیش کرتے ہیں۔

ایسی دو اشیا A اور B پر غور کیجیے جو ایک بعُد (dimension) (مان لیجیے کہ x- محور) میں یکساں اوسط رفتاروں v_A اور v_B سے حرکت کررہی ہیں۔ (جب تک خاص طور پر وضاحت نہ کی گئی ہو اس باب میں رفتاروں کی زمین کے حوالے سے پیائش کی گئی ہے)۔ اگر $t = 0$ ساعت پر شے A اور B کے مقامات علی الترتیب x_A (0) اور x_B (0) ہوں تو کسی دیگر ساعت t پر یہ مقام درج ذیل ہوں گے:

$$x_A(t) = x_A(0) + v_A t \quad (3.12a)$$

$$x_B(t) = x_B(0) + v_B t \quad (3.12b)$$

حصّہ 3.1 میں دی گئی تعریف کے مطابق شے A اور شے B کے درمیان نقل ہوگا۔

$$x_{BA}(t) = x_B(t) - x_A(t)$$
$$= [x_B(0) - x_A(0)] + (v_B - v_A)t \quad (3.13)$$

مساوات (3.13) کی ہم آسانی سے تشریح کرسکتے ہیں۔ اس مساوات سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جب شے A سے دیکھتے ہیں تو شے B کی رفتار $v_B - v_A$ ہوتی ہے کیونکہ A تا B نقل ہر اکائی وقت میں $v_B - v_A$ کی مقدار سے مستقل بدلتا جاتا ہے۔ لہٰذا ہم یہ کہتے ہیں کہ شے B کی رفتار شے A کی نسبت $v_B - v_A$ ہے۔

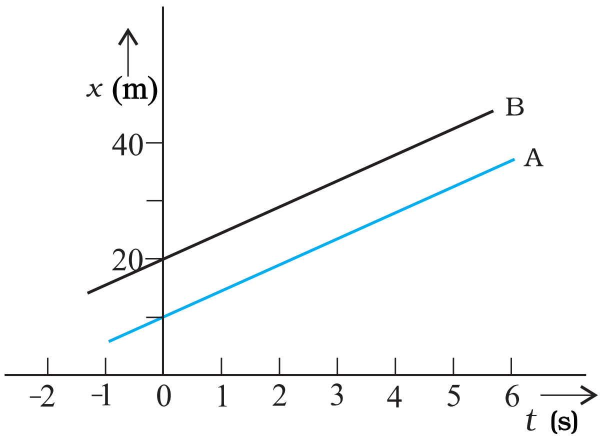
$$v_{BA} = v_B - v_A \quad (3.14a)$$

اسی طرح شے A کی رفتار شے B کی نسبت

$$v_{AB} = v_A - v_B \quad (3.14b)$$

ہوگی۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

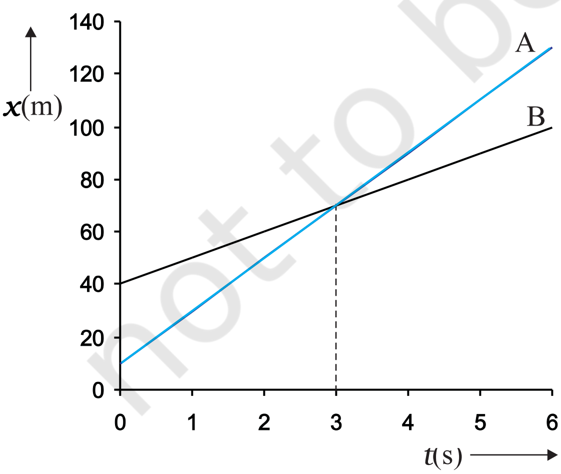
$$v_{BA} = -v_{AB} \quad (3.14c)$$



شکل 3.16 مساوی رفتار سے متحرک اشیا A اور B کے لیے مقام-وقت گراف

اب ہم کچھ خاص مثالوں پر غور کریں گے:

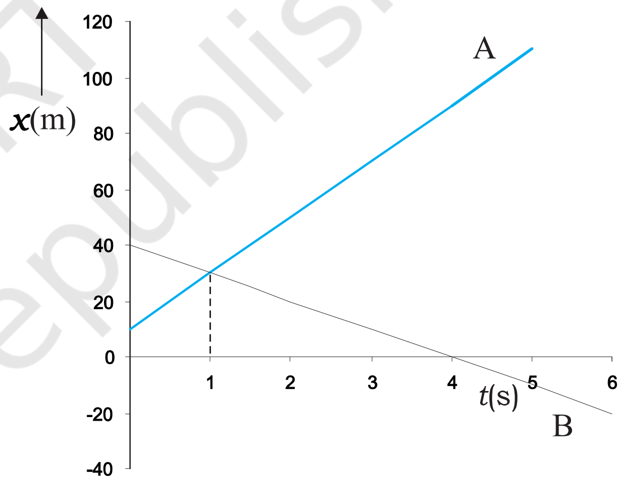
(a) اگر $v_A = v_B$، $v_B - v_A = 0$ تو مساوات (3.13) سے $x_B(t) - x_A(t) = x_B(0) - x_A(0)$، اس کا مطلب یہ ہے دونوں اشیا ایک دوسرے سے ہمیشہ مستقل دوری $(x_B(0) - x_A(0))$ پر ہیں اور ان کے مقام-وقت گراف باہمی طور پر متوازی مستقیم خطوط ہوتے ہیں، جیسا کہ شکل 3.16 میں دکھایا گیا ہے۔ اس مثال میں نسبتی رفتار v_{AB} یا v_{BA} صفر ہیں۔



شکل 3.17 غیر مساوی رفتاروں سے متحرک اشیا کے مقام-وقت گراف جس میں ان کے ملنے کا وقت دکھایا گیا ھے

(b) اگر $v_A > v_B$، $v_B - v_A$ منفی ہے، ایک شے کے گراف کی ڈھلان دوسری شے کے گراف کی ڈھلان کی نسبت زیادہ ہے۔ دونوں گراف ایک مشترک نقطے پر ملتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر $v_A = 20\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ اور $x_A(0) = 10\ \mathrm{m}$؛ اور $v_B = 10\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ اور $x_B(0) = 40\ \mathrm{m}$ تو جس ساعت پر دونوں شے ایک دوسرے سے ملتی ہیں وہ $t = 3\ \mathrm{s}$ ہوگی (شکل 3.17)۔ اس ساعت پر وہ دونوں اشیا $x_A(t) = x_B(t) = 70\ \mathrm{m}$ پر ہوں گی۔ اس طرح اس ساعت پر شے A، شے B سے آگے نکل جائے گی۔ اس مثال میں

$$v_{BA} = 10\ \mathrm{m\ s^{-1}} - 20\ \mathrm{m\ s^{-1}} = -10\ \mathrm{m\ s^{-1}} = -v_{AB}$$



شکل 3.18 ایک دوسرے کی مختلف سمت میں متحرک دو اشیا کے مقام –وقت گراف جس میں دونوں کے ملنے کا وقت دکھایا گیا ہے۔

(c) مان لیجیے کہ v_A اور v_B مخالف علامتوں کی ہیں۔ مثال کے لیے درج بالا مثال میں اگر شے A مقام $x_A(0) = 10\ \mathrm{m}$ سے $20\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ کی رفتار سے اور شے B مقام $x_B(0) = 40\ \mathrm{m}$ سے $-10\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ رفتار سے چلنا شروع کرتی ہیں تو وہ $t = 1\ \mathrm{s}$ (شکل 3.18) پر ملتی ہیں۔ A کی نسبت B کی رفتار $v_{BA} = [-10-(20)]\ \mathrm{m\ s^{-1}} = -30\ \mathrm{m\ s^{-1}} = -v_{AB}$ ہوگی۔ اس مثال میں v_{BA} یا v_{AB} کی عددی قدر $(=30\ \mathrm{m\ s^{-1}})$ شے A یا B کی رفتار کی عددی قدر سے زیادہ ہے۔ اگر زیر غور اشیا دو ریل گاڑیاں ہیں تو اس شخص کے لیے جو کسی ایک ریل گاڑی میں بیٹھا ہے، دوسری ریل گاڑی بہت تیز چلتی ہوئی دکھائی پڑتی ہے۔

غور کریں کہ مساواتیں (3.14) تب بھی صحیح ہوں گی جب v_A اور v_B ساعتی رفتاروں کو ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 3.9 دو متوازی ریل پٹریاں شمال۔ جنوب سمت میں ہیں۔ ایک ریل گاڑی A شمالی سمت میں $54\ \mathrm{km/h^{-1}}$ کی چال سے حرکت کر رہی ہے اور دوسری ریل گاڑی B جنوبی سمت میں $90\ \mathrm{km/h}$ کی چال سے چل رہی ہے۔

(a) A کے لحاظ سے B کی نسبتی رفتار نکالیے۔

(b) B کے لحاظ سے زمین کی نسبتی رفتار نکالیے۔

(c) ریل گاڑی A کی چھت پر حرکت کی مخالف سمت میں (ریل گاڑی A کے لحاظ سے $18\ \mathrm{km\ h^{-1}}$ کی رفتار سے) دوڑتے ہوئے اس بندر کی رفتار تحسیب کیجیے جو زمین پر کھڑے ایک شخص کے ذریعے دیکھا جا رہا ہے؟

جواب (a) محور-x کی مثبت سمت کو جنوب سے شمال کی جانب چنیے۔ تب

$$v_A = +54\ \mathrm{km\ h^{-1}} = 15\ \mathrm{m\ s^{-1}}$$

$$v_B = -90\ \mathrm{km\ h^{-1}} = -25\ \mathrm{m\ s^{-1}}$$

A کے لحاظ سے B کی نسبتی رفتار: $v_B - v_A = -40\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ ہوگی۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ ریل گاڑی B ریل گاڑی A کی نسبت شمال سے جنوب سمت میں $40\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ کی چال سے چلتی دکھائی دے گی۔

(b) B کے لحاظ سے زمین کی نسبتی رفتار $0 - v_B = 25\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ ہے۔

(c) میں مان لیجیے کہ زمین کے لحاظ سے بندر کی رفتار v_M ہے۔ اس لیے A کے لحاظ سے بندر کی رفتار $v_M - v_A = -18\ \mathrm{km\ h^{-1}} = -5\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

نتیجتاً $v_M = (15-5)\ \mathrm{m\ s^{-1}} = 10\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

خلاصہ

1۔ اگر کسی شے کا مقام وقت کے ساتھ بدلتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ شے حرکت میں ہے۔ شے کے مقام کا تعین آسانی کے ساتھ چنے گئے کسی مبدا (بنیادی نقطے) کے حوالے سے کیا جاسکتا ہے۔ خط مستقیم میں حرکت کے لیے بنیادی نقطے کے داہنی طرف کے مقامات کو مثبت اور بائیں طرف کے مقامات کو منفی کہا جاتا ہے۔

2۔ کسی شے کے ذریعے طے کی دوری کی گئی لمبائی کو راہ کی لمبائی (path length) کے طور پر معرف کرتے ہیں۔

3۔ کسی شے کے مقام کی تبدیلی کو ہم نقل (displacement) کہتے ہیں اور Δx سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

x_1 اور x_2 شے کے علی الترتیب ابتدائی اور آخری مقامات ہیں۔

راہ کی لمبائی اُنہیں دو نقاط کے درمیان نقل کی عددی قدر کے برابر یا اس سے زیادہ ہوسکتی ہے۔

4۔ ایک شے کو خطِ مستقیم میں یکساں حرکت کرتے ہوئے اس وقت کہا جاتا ہے جب مساوی وقفہ وقت میں اس کا نقل مساوی ہو۔ ورنہ حرکت کو غیر یکساں حرکت کہتے ہیں۔

5۔ نقل کے دوران لگے وقفہ وقت کے ذریعے نقل کو تقسیم کرنے پر جو مقدار حاصل ہوتی ہے اسے اوسط رفتار (average velocity) کہتے ہیں اور اسے $\bar{v}$ کے ذریعے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$x-t$ گراف میں کسی دیے گئے وقفے کی مدت میں اوسط رفتار اس خط مستقیم کی ڈھلان (slope) ہے جو وقفۂ وقت کے ابتدائی اور آخری مقام کو جوڑتا ہے۔

6۔ شے کے سفر کی مدت میں طے کی گئی کل راہ لمبائی اور اس میں لگے وقفہ وقت کے تناسب کو اوسط چال (average speed) کہتے ہیں۔ کسی شے کی اوسط چال کسی دیے گئے وقفہ وقت میں اس کی اوسط رفتار کی عددی قدر کے برابر یا اس سے زیادہ ہوتی ہے۔

7۔ جب وقفہ وقت Δt لا انتہا خفیف ہو تو شے کی اوسط رفتار کی حدی قدر کو ساعتی رفتار (instantaneous velocity) یا صرف رفتار کہتے ہیں۔

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

کسی مخصوص وقت پر شے کی رفتار اس ساعت پر، مقام۔وقت گراف پر کھینچے گئے مماس کی ڈھلان کے برابر ہوتی ہے۔

8۔ شے کی رفتار میں تبدیلی کو وقفہ وقت جس کے دوران تبدیلی واقع ہوتی ہے، کے ذریعے تقسیم کرنے پر جو مقدار حاصل ہوتی ہے اسے اوسط اسراع (average acceleration) کہتے ہیں۔

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

9۔ جب وقفہ وقت Δt صفر کی جانب مائل ہوتو شے کی اوسط اسراع کی حدی قدر کو ساعتی اسراع (instantaneous acceleration) کہا جاتا ہے۔

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

کسی ساعت پر شے کا اسراع اس ساعت پر رفتار–وقت گراف کی ڈھلان کے برابر ہوتا ہے۔ یکساں حرکت کے لیے اسراع صفر ہوتا ہے اور $x\text{–}t$ گراف وقت محور کی جانب جھکا ہوا ایک خط مستقیم ہوتا ہے۔ اسی طرح یکساں حرکت کے لیے $v - t$ گراف وقت محور کے متوازی خط مستقیم ہوتا ہے۔ یکساں اسراع کے لیے $x - t$ گراف مکاف (parabola) ہوتا ہے جب کہ $v - t$ گراف وقت محور کی طرف جھکا ہوا ایک خط مستقیم ہوتا ہے۔

10. کن ہی دو وقتوں t_1 اور t_2 کے درمیان کھینچے گئے رفتار وقت منحنی کے تحت آنے والا رقبہ شے کے نقل کے برابر ہوتا ہے۔

11. یکساں اسراع سے خطی حرکت کرتی ہوئی شے کے لیے کچھ سادہ مساواتوں کا ایک سیٹ ہوتا ہے جس سے پانچ مقداریں؛ نقل x، اس سے متعلق وقت t، ابتدائی رفتار v_0، آخری رفتار v اور اسراع a ایک دوسرے سے منسلک ہوتے ہیں۔ ان مساواتوں کو شے کی مجرد حرکیاتی مساواتوں (kinematic equations of motion) کے نام سے جانا جاتا ہے۔

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

ان مساوات میں وقت $t = 0$ پر شے کا مقام $x = 0$ لیا گیا ہے۔ لیکن شے $x = x_0$ سے چلنا شروع کرے تو درج بالا مساوات میں x کے بجائے $(x - x_0)$ لکھیں گے۔

طبیعی مقدار	علامت	ابعاد	اکائی	تبصرہ
راہ کی لمبائی		[L]	m	
نقل	Δx	[L]	m	$= x_2 - x_1$ ایک بعُد میں اس کی علامت، سمت ظاہر کرتی ہے۔
رفتار (a) اوسط (b) ساعتی	 $\bar{v}$ v	$[LT^{-1}]$	$m\ s^{-1}$	$= \frac{\Delta x}{\Delta t}$ $= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ ایک بعد میں اس کی علامت سمت ظاہر کرتی ہے۔

چال (a) اوسط (b) ساعتی		$[LT^{-1}]$	$m\ s^{-1}$	$= \frac{\text{راہ کی لمبائی}}{\text{وقفہ وقت}}$ $= \frac{dx}{dt}$
اسراع (a) اوسط (b) ساعتی	$\bar{a}$ a	$[LT^{-2}]$	$m\ s^{-2}$ $\frac{\Delta v}{\Delta t}$	$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$ ایک بعُد میں اس کی علامت سمت کی نشاندہی کرتی ہے۔

قابل غور نکات

1۔ عمومی طور پر دو نقاط کے درمیان کسی شے کے ذریعے چلی گئی راہ لمبائی نقل کی قدر کی برابر نہیں ہوتی۔ نقل سرے کے نقاط پر منحصر کرتا ہے جب کہ راہ لمبائی (جیسا کہ نام سے پتہ چلتا ہے) حقیقی راہ پر منحصر ہوتی ہے۔ ایک بعُد (dimension) میں دونوں مقداریں تبھی برابر ہوتی ہیں جب شے حرکت کے دوران اپنی سمت نہیں بدلتی۔ دیگر سبھی مثالوں میں راہ لمبائی نقل کی عددی قدر سے زیادہ ہوتی ہے۔

2۔ درج بالا نقطہ 1 کے مطابق کسی دیے گئے وقفہ وقت کے لیے شے کی اوسط چال کی قدر یا تو اوسط رفتار کی عددی قدر کے برابر یا اس سے زیادہ ہوگی۔ یہ دونوں برابر ہوں گی اگر راہ کی لمبائی اور نقل کی عددی قدر برابر ہوں۔

3۔ مُبدا اور کسی محور کی مثبت سمت کا انتخاب اپنا اختیار ہے۔ آپ کو سب سے پہلے اس انتخاب کا تعین کر دینا چاہیے اور اس کے بعد نقل، رفتار اور اسراع جیسی مقداروں کی علامتوں کا تعین کرنا چاہیے۔

4۔ اگر کسی شے کی چال بڑھتی جا رہی ہے تو اسراع رفتار کی سمت میں ہوگا لیکن اگر چال گھٹتی جاتی ہے تو اسراع رفتار کی مخالف سمت میں ہوگا۔ یہ بیان مُبدا اور محور کے انتخاب کے تابع نہیں ہے۔

5۔ اسراع کی علامت سے ہمیں یہ پتہ نہیں چلتا کہ شے کی چال بڑھ رہی ہے یا گھٹ رہی ہے۔ اسراع کی علامت (جیسا کہ درج بالا نقطہ 3 میں بتایا گیا ہے) محور کی مثبت سمت کے انتخاب پر منحصر ہے۔ مثال کے لیے اگر اُوپر کی طرف عمودی سمت کو محور کی مثبت سمت مانا جائے تو مادی کشش اسراع منفی ہوگا۔ اگر کوئی شے ارضی کشش کے سبب نیچے کی طرف گر رہی ہے تو شے کی چال بڑھتی جائے گی تاہم اسراع کی قدر منفی ہے۔ شے اوپر کی سمت میں پھینکی جائے تو اسی منفی (مادی کشش کے سبب) اسراع کے سبب شے کی چال میں کمی آتی جائے گی۔

6۔ اگر کسی ساعت پر شے کی رفتار صفر ہے تو یہ ضروری نہیں ہے کہ اس ساعت پر اس کا اسراع بھی صفر ہوگا۔ کوئی شے وقتی طور پر سکون کی حالت میں ہو سکتی ہے تاہم اس ساعت پر اس کا اسراع صفر نہیں بھی ہو سکتا ہے۔ مثال کے لیے اگر کسی شے کو اوپر کی طرف پھینکا جائے تو انتہائی اوپری نقطے پر اس کی رفتار تو صفر ہوگی لیکن اس موقع پر اس کا اسراع مادی کشش کے سبب اسراع ہی رہے گا۔

7۔ حرکت کی مجرد حرکیاتی مساواتوں [مساوات (3.11)] میں شامل مختلف مقداریں الجبرائی ہیں، یعنی وہ مثبت یا منفی ہو سکتی ہیں۔ یہ مساوات سبھی حالتوں (مستقل اسراع کے ساتھ ایک بعُدی حرکت) کے لیے موزوں ہوتی ہیں، شرط یہ ہے کہ مساواتوں میں مختلف

مقداروں کی قدریں مناسب علامتوں کے ساتھ رکھی جائیں۔

8۔ ساعتی رفتار اور اسراع کی تعریف [مساوات (3.3) اور مساوات (3.5)] قطعی درست ہیں اور ہمیشہ درست ہیں جب کہ مجرد حرکی مساوات [مساوات (3.11)] انھیں حرکتوں کے لیے قطعی درست ہیں جن میں حرکت کی مدت میں اسراع کی قدر اور سمت مستقل رہتی ہے۔

مشق

3.1 نیچے دی گئی حرکت کی مثالوں میں کس میں شے کو تقریباً نقطہ شے مانا جاسکتا ہے:

(a) دو اسٹیشنوں کے درمیان بغیر کسی جھٹکے کے چل رہی کوئی ریل گاڑی۔

(b) کسی دائری راہ پر سائیکل چلا رہے کسی شخص کے اوپر بیٹھا کوئی بندر۔

(c) زمین سے ٹکرا کر تیزی سے مڑنے والی کرکٹ کی کوئی چکر کھاتی گیند۔

(d) کسی میز کے کنارے سے پھسل کر گرا کوئی بیکر۔

3.2 دو بچے A اور B اپنے اسکول O سے واپس ہو کر اپنے اپنے گھر علی الترتیب P اور Q کو جا رہے ہیں۔ ان کے مقام۔ وقت $(x–t)$ گراف شکل 3.19 میں دکھائے گئے ہیں۔ نیچے لکھے بریکٹوں میں صحیح اندراج کو منتخب کیجیے:

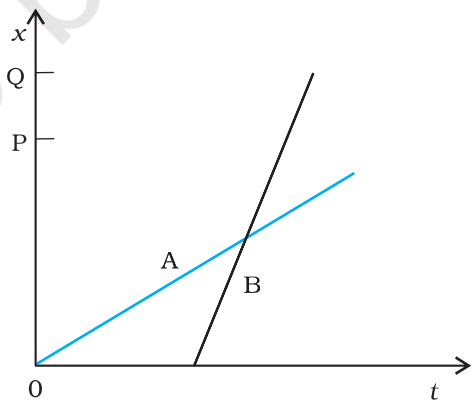
(a) (B/A) کے مقابلے (A/B) اسکول سے قریب رہتا ہے۔

(b) (B/A) کے مقابلے (A/B) اسکول سے پہلے چلتا ہے۔

(c) (B/A) کے مقابلے (A/B) تیز چلتا ہے۔

(d) A اور B گھر (ایک ہی/مختلف) وقت پر پہنچتے ہیں۔

(e) A/B سڑک پر B/A سے (ایک بار/دوبار) آگے ہوجاتا ہے۔



شکل **3.19**

3.3 ایک خاتون اپنے گھر سے صبح 9.00 بجے 2.5 کلومیٹر دور اپنے دفتر کے لیے سیدھی سڑک پر $5\ \text{km h}^{-1}$ چال سے چلتی ہیں۔ وہاں وہ شام 5.00 بجے تک رہتی ہیں اور $25\ \text{km h}^{-1}$ کی چال سے چل رہے کسی آٹو رکشہ کے ذریعے اپنے گھر واپس

آتی ہیں۔کوئی مناسب پیمانہ چنیے اوران کی حرکت کا $x-t$ گراف کھینچیے۔

3.4 کوئی شرابی کسی تنگ گلی میں 5 قدم آگے بڑھتا ہے اور 3 قدم پیچھے آتا ہے۔اس کے بعد پھر 5 قدم آگے بڑھتا ہے اور 3 قدم پیچھے آتا ہے اوراسی طرح چلتا رہتا ہے۔اس کا ہر قدم 1 m لمبا ہے اور 1s وقت لیتا ہے۔اس کی حرکت کا $x-t$ گراف کھینچیے۔ گراف سے یا کسی دیگر طریقے سے یہ معلوم کیجیے کہ وہ جہاں سے چلنا شروع کرتا ہے وہاں سے 13 m دور ایک گڑھے میں وہ کتنے وقت کے بعد گرتا ہے۔

3.5 کوئی جیٹ ہوائی جہاز 500 km h^{-1} کی چال سے چل رہا ہے اور جیٹ جہاز کی نسبت $1,500 \text{ km h}^{-1}$ کی چال سے اپنے ماحصل احتراق (products of combustion) کو باہر نکالتا ہے۔زمین پر کھڑے کسی مشاہد کے لحاظ سے اس ماحصل احتراق کی چال کیا ہوگی؟

3.6 سیدھی قومی شاہراہ پر کوئی کار 126 km h^{-1} کی چال سے چل رہی ہے۔اسے 200 m کی دوری پر روک دیا جاتا ہے۔کار کے منفی اسراع کو یکساں مانیے اوراس کی قدر نکالیے۔کار کو رکنے میں کتنا وقت لگا؟

3.7 دو ریل گاڑیاں A اور B دو متوازی پٹریوں پر 72 km h^{-1} کی یکساں چال سے ایک ہی سمت میں چل رہی ہیں۔ ہر ایک گاڑی 400 m لمبی ہے اور گاڑی A گاڑی B سے آگے ہے۔B کا ڈرائیور A سے آگے نکلنا چاہتا ہے اور 1 m s^{-2} سے اسراع کرتا ہے۔اگر 50 s کے بعد B کا گارڈ A کے ڈرائیور سے آگے ہوجاتا ہے تو دونوں کے درمیان ابتدائی دوری کتنی تھی؟

3.8 دو لین والی کسی سڑک پر کار A 36 km h^{-1} کی چال سے چل رہی ہے۔ایک دوسرے کی مخالف سمتوں سے چلتی دو کاریں B اور C جن میں سے ہر ایک کی چال 54 km h^{-1} ہے،کار A تک پہنچنا چاہتی ہیں۔کسی ساعت پر جب دوری AB، دوری AC کے برابر ہے اور دونوں 1 km کے برابر ہیں،کار B کا ڈرائیور یہ فیصلہ کرتا ہے کہ کار C کے کار A تک پہنچنے سے پہلے ہی وہ کار A سے آگے نکل جائے۔کسی حادثے سے بچنے کے لیے کار B کا کتنا کم ترین اسراع ضروری ہے؟

3.9 دو شہر A اور B باقاعدہ بس سروس کے ذریعے ایک دوسرے سے جڑے ہیں اور ہر T منٹ کے بعد دونوں طرف بسیں چلتی ہیں۔ کوئی شخص سائیکل سے 20 km h^{-1} کی چال سے A سے B کی طرف جارہا ہے اور یہ نوٹ کرتا ہے کہ ہر ایک 18 منٹ کے بعد ایک بس اس کی حرکت کی سمت میں اور ہر ایک 6 منٹ بعد اس کی مخالف سمت میں گزرتی ہے۔بس سروس کی مدت T کتنی ہے اور بسیں سڑک پر کس چال (مستقل مانیے) سے چلتی ہیں؟

3.10 کوئی کھلاڑی ایک گیند کو اوپر کی طرف ابتدائی چال 29.4 m s^{-1} سے پھینکتا ہے۔

(a) گیند کی اوپر کی طرف حرکت کے دوران اسراع کی سمت کیا ہوگی؟

(b) اس کی حرکت کے انتہائی اونچے نقطے پر گیند کی رفتار اوراسراع کی قدریں کیا ہوں گی؟

(c) گیند کے انتہائی اونچے نقطے پر مقام اور وقت کو $x = 0$ اور $t = 0$ چنیے،عمودی طور پر نیچے کی جانب کی سمت کو x- کی مثبت سمت مانیے۔گیند کے اوپر اور نیچے کی طرف حرکت کے دوران مقام،رفتار اوراسراع کی علامتیں بتائیے۔

(d) کس اونچائی تک گیند اوپر جاتی ہے اور کتنی دیر کے بعد گیند کھلاڑی کے ہاتھوں میں آجاتی ہے؟

[$g = 9.8\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ اور ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کیجیے۔]

3.11 نیچے دیے گئے بیانات کو غور سے پڑھیے اور وجوہات بتاتے ہوئے اور مثال دیتے ہوئے بتائیے کہ وہ صحیح ہیں یا غلط، : یکساں حرکت (uniform motion) میں کسی ذرّے کی:

(a) کسی ساعت پر چال صفر ہونے پر بھی اس کا اسراع غیر صفر ہوسکتا ہے۔

(b) چال صفر ہونے پر بھی اس کی رفتار غیر صفر ہوسکتی ہے۔

(c) چال مستقلہ ہو تو اسراع لازمی طور پر صفر ہونا چاہیے۔

(d) چال لازمی طور سے بڑھتی رہی گی، اگر اس کا اسراع مثبت ہو۔

3.12 دو مقداریں ہیں: کسی گیند کو 90 m کی اونچائی سے فرش پر گرایا جاتا ہے۔ فرش کے ساتھ ہر ایک ٹکر میں گیند کی چال 1/10 کم ہوجاتی ہے۔ اس کی حرکت کا $t = 0$ تا 12 s کے درمیان چال۔ وقت گراف کھینچیے۔

3.13 مثالوں کے ساتھ درج ذیل کے درمیان کے فرق کو واضح کیجیے۔

(a) دو مقداریں ہیں: کسی وقفہ وقت میں نقل کی عددی قدر (جسے کبھی کبھی دوری بھی کہا جاتا ہے) اور کسی ذرے کے ذریعے اسی وقفے کے دوران طے کی گئی راہ کی کل لمبائی۔

(b) کسی وقفہ وقت میں اوسط رفتار کی عددی قدر اور اسی وقفے میں اوسط چال (کسی وقفہ وقت میں کسی ذرے کی اوسط چال کی تعریف ہے: وقفہ وقت کے ذریعے تقسیم کی گئی کل راہ لمبائی)۔ ظاہر کیجیے کہ (a) اور (b) دونوں میں دوسری مقدار پہلے سے زیادہ یا اس کے برابر ہے۔ مساوات کی علامت کب صحیح ہوتی ہے؟ (آسانی کے لیے صرف یک۔ بُعدی حرکت پر غور کیجیے)۔

3.14 کوئی شخص اپنے گھر سے سیدھی سڑک پر $5\ \mathrm{km\ h^{-1}}$ کی چال سے 2.5 km دور بازار تک پیدل چلتا ہے۔ لیکن بازار بند دیکھ کر وہ اسی وقت واپس مڑ جاتا ہے اور $7.5\ \mathrm{km\ h^{-1}}$ کی چال سے گھر واپس ہوتا ہے۔

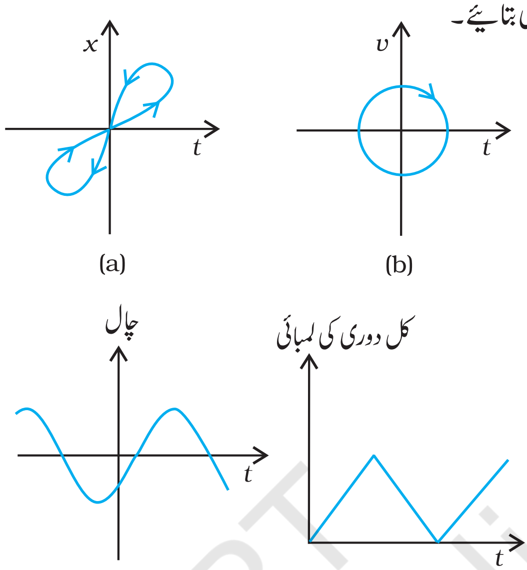
(a) شخص کی اوسط رفتار کی عددی قدر کتنی ہے؟ اور

(b) وقفہ وقت (i) 30 - 0 منٹ (ii) 50 - 0 منٹ (iii) 40 - 0 منٹ کی مدت میں اس شخص کی اوسط چال کیا ہے؟

[نوٹ: آپ اس مثال سے سمجھ سکیں گے کہ اوسط چال کو اوسط رفتار کی عددی قدر کی شکل میں بیان کرنے کی نسبت وقت کے ذریعے تقسیم کی گئی کل راہ لمبائی کے طور پر بیان کرنا زیادہ اچھا کیوں ہے۔ آپ تھک کر گھر واپس ہوئے اس شخص کو یہ شاید نہیں بتانا چاہیں کہ اس کی اوسط چال صفر تھی]۔

3.15 ہم نے 3.13 اور 3.14 میں اوسط چال اور اوسط رفتار کی عددی قدر کے درمیان کے فرق کو ظاہر کیا ہے۔ اگر ہم ساعتی چال اور ساعتی رفتار کی عددی قدر پر غور کرتے ہیں تو اس طرح کا فرق کرنا ضروری نہیں ہوتا۔ ساعتی چال ہمیشہ ساعتی رفتار کی عددی قدر کے برابر ہوتی ہے۔ کیوں؟

3.16 شکل 3.20 میں (a) تا (d) کے گرافوں کو غور سے دیکھیے اور دیکھ کر بتائیے کہ ان میں سے کون سے گراف یک ابعادی حرکت کو غالباً نہیں دکھا سکتے ہیں۔ وجہ بھی بتائیے۔



(a) (b)

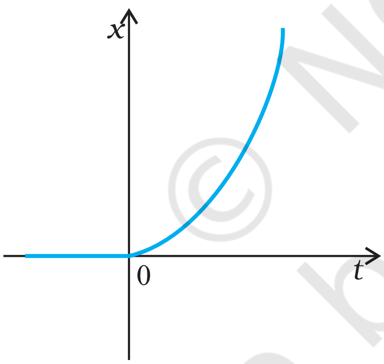
(c) (d)

(b)

(d)

شکل 3.20

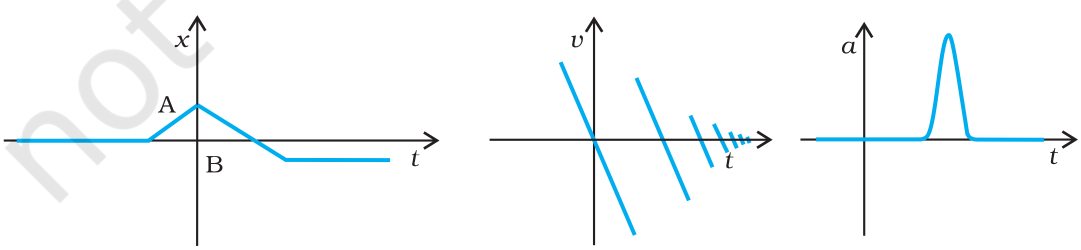
3.17 شکل 3.21 میں کسی ذرے کی ایک بعدی حرکت کے لیے $x - t$ گراف دکھایا گیا ہے۔ گراف سے کیا یہ کہنا درست ہوگا کہ یہ ذرہ $t < 0$ کے لیے کسی خط مستقیم میں اور $t > 0$ کے لیے کسی مکافی (parabolic) راہ میں حرکت کرتا ہے؟ اگر نہیں تو گراف کے موافق کوئی موزوں طبیعی حوالہ کی تجویز پیش کیجیے۔



شکل 3.21

3.18 کسی قومی شاہراہ پر پولیس کی کوئی گاڑی 30 km/h کی چال سے چل رہی ہے اور پولیس اسی سمت میں 192 km/h کی چال سے جا رہی کسی چور کی کار پر گولی چلاتی ہے۔ اگر گولی کی نالی کے منہ سے نکلتے وقت چال 150 m s^{-1} ہے تو چور کی کار کو گولی کس چال کے ساتھ لگے گی؟ (نوٹ: اس چال کو معلوم کیجیے جو کار کو نقصان پہنچانے میں موزوں ہو)۔

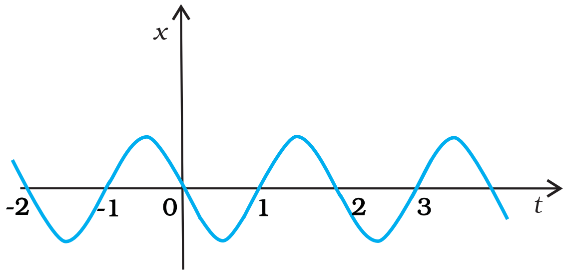
3.19 شکل 3.22 میں دکھائے گئے ہر گراف کے لیے کسی مناسب طبیعی صورتِ حال کی تجویز پیش کیجیے۔



(a) (b) (c)

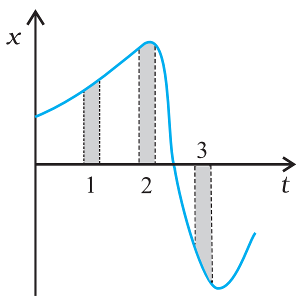
شکل 3.22

3.20 شکل 3.23 میں کسی ذرے کی ایک بعُدی سادہ ہارمونی حرکت کے لیے x - t گراف دکھایا گیا ہے۔(اس حرکت کے بارے میں آپ باب 14 میں پڑھیں گے)۔وقت t=0.3 s، 1.2 s، 1.2 s– پر ذرے کے مقام، رفتار اور اسراع کی علامتیں کیا ہوں گی؟



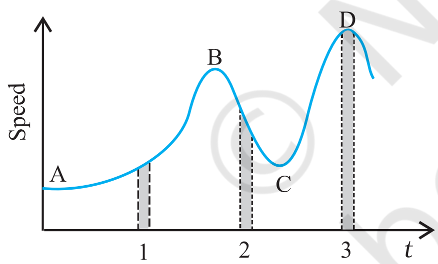
شکل 3.23

3.21 شکل 3.24 کسی ذرے کی ایک بعُدی حرکت کا x-t گراف ظاہر کرتی ہے۔
اس میں تین یکساں وقفے دکھائے گئے ہیں۔کس وقفے میں اوسط چال بیش ترین ہے اور کس میں کم ترین ہے؟ ہر ایک وقفے کے لیے اوسط رفتار کی علامت بتائیے۔



شکل 3.24

3.22 شکل 3.25 میں کسی مستقل سمت میں چل رہے ذرے کا چال۔وقت گراف دکھایا گیا ہے۔اس میں تین یکساں وقفہ وقت دکھائے گئے ہیں۔کس وقفہ میں اوسط اسراع کی عددی قدر بیش ترین ہوگی؟ کس وقفے میں اوسط چال بیش ترین ہوگی؟ مثبت سمت کو حرکت کی مستقل سمت چنتے ہوئے تینوں وقفوں میں v اور a کی علامتیں بتائیے۔A,B,C اور D نقاط پر اسراع کی قدریں کیا ہوں گی؟



شکل 3.25

اضافی مشق

3.23 کوئی تین پہیے والا اسکوٹر اپنی حالتِ سکون سے حرکت کرتا ہے پھر 10 s تک کسی سیدھی سڑک پر 1 m s^{-2} کے یکساں اسراع سے چلتا ہے۔اس کے بعد وہ یکساں رفتار سے چلتا ہے۔اسکوٹر کے ذریعے n ویں سیکنڈ (n = 1, 2, 3...) میں طے کی گئی دوری کو n کے مقابل پلاٹ کیجیے۔آپ کیا توقع کرتے ہیں کہ اسراعی حرکت کے دوران یہ گراف کوئی خط مستقیم یا کوئی مکاف (پیرابولا) ہوگا؟

3.24 کسی ساکن لفٹ میں (جو اوپر سے کھلی ہے) کوئی لڑکا کھڑا ہے۔وہ اپنی پوری طاقت سے ایک گیند اوپر کی طرف پھینکتا ہے جس کی ابتدائی چال 49 m s^{-1} ہے۔اس کے ہاتھوں میں گیند کے واپس آنے میں کتنا وقت لگے گا؟ اگر لفٹ اوپر کی طرف 5 m s^{-1} کی یکساں چال سے حرکت کرنا شروع کردے اور وہ لڑکا پھر گیند کو اپنے پورے زور سے پھینکتا ہے تو کتنی دیر میں گیند اس کے ہاتھوں

میں واپس آئے گی؟

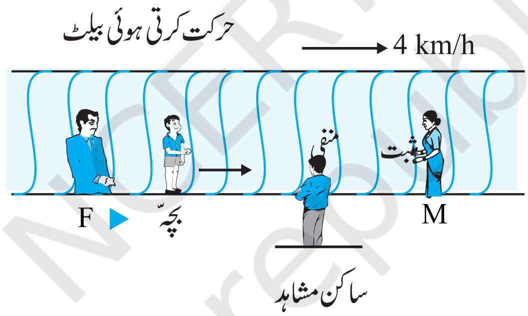
3.25 افقی طور پر متحرک ایک لمبی بیلٹ (شکل 3.26) پر ایک لڑکا (بیلٹ کی مناسبت سے) 9 km/h کی چال سے کبھی آگے کبھی پیچھے اپنے والد اور والدہ کے بیچ دوڑ رہا ہے۔ والد اور والدہ کے درمیان 50 m کی دوری ہے۔ باہر کسی ساکن پلیٹ فارم پر کھڑے ایک مشاہد کے لیے، درج ذیل کی قدر حاصل کیجیے۔ بیلٹ $4\ \text{km h}^{-1}$ کی چال سے حرکت کر رہی ہے۔

(a) بیلٹ کی حرکت کی سمت میں دوڑ رہے لڑکے کی چال،

(b) بیلٹ کی حرکت کی سمت کے مخالف دوڑ رہے لڑکے کی چال،

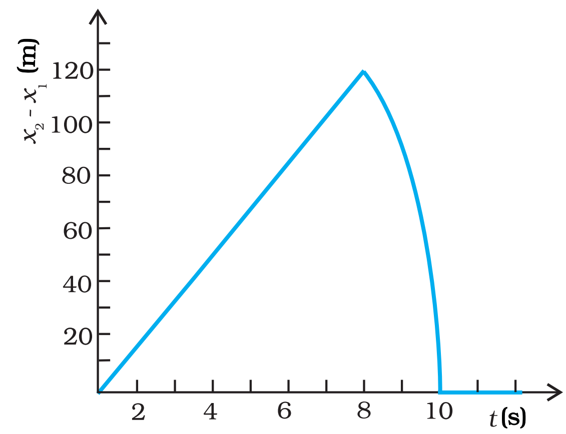
(c) بچے کے ذریعے (a) اور (b) میں لیا گیا وقت

اگر لڑکے کی حرکت کا مشاہدہ اس کے والد یا والدہ میں سے کوئی کرے تو کون سا جواب بدل جائے گا؟



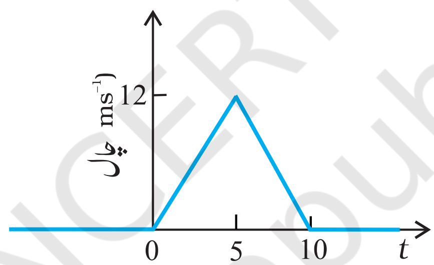
شکل 3.26

3.26 کسی 200 m اونچی کھڑی چٹان کے کنارے سے دو پتھروں کو ایک ساتھ اوپر کی جانب $15\ \text{m s}^{-1}$ اور $30\ \text{m s}^{-1}$ کی ابتدائی چال سے پھینکا جاتا ہے۔ اس کی تصدیق کیجیے کہ نیچے دکھایا گیا گراف (شکل 3.27) پہلے پتھر کے لحاظ سے دوسرے پتھر کی نسبتی حالت کا وقت کے ساتھ تبدیلی کو ظاہر کرتا ہے۔ ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کریے اور یہ مانیے کہ زمین سے ٹکرانے کے بعد پتھر اوپر کی طرف اُچھلتے نہیں۔ مان لیجیے $g = 10\ \text{m s}^{-2}$۔ گراف کے خطی اور منحنی حصوں کے لیے مساوات لکھیے۔



شکل 3.27

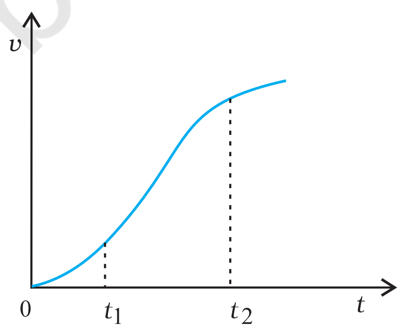
3.27 کسی متعین سمت میں حرکت کر رہے کسی ذرے کا چال وقت گراف شکل 3.28 میں دکھایا گیا ہے۔ ذرے کے ذریعے (a) $t = 0$ تا $t = 10$ s (b) $t = 2$ s سے 6 s کے درمیان دوری معلوم کیجیے۔



شکل 3.28

(a) اور (b) میں دیے گئے وقفوں کی مدت میں ذرے کی اوسط چال کیا ہے؟

3.28 ایک بعدی حرکت میں کسی ذرے کا رفتار وقت گراف نیچے شکل 3.29 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 3.29

نیچے دیے گئے فارمولوں میں t_1 سے t_2 تک کے وقفہ وقت کی مدت میں ذرے کی حرکت کا بیان کرنے کے لیے کون سے فارمولے صحیح ہیں:

(a) $x(t_2) = x(t_1) + v(t_1)(t_2-t_1) + (1/2)\,a(t_2-t_1)^2$

(b) $v(t_2) = v(t_1) + a(t_2-t_1)$

$$v_{average} = (x(t_2) - x(t_1))/(t_2 - t_1) \quad \text{(c)}$$

$$a_{average} = [v(t_2) - v(t_1)]/(t_2 - t_1) \quad \text{(d)}$$

$$x(t_2) = x(t_1) + v_{average}(t_2 - t_1) + (1/2)\, a_{average}(t_2 - t_1)^2 \quad \text{(e)}$$

(f) $= x(t_2) - x(t_1)$ محور- t اور دکھائے گئے نقطہ دار خط کے ذریعے مقید، v-t منحنی کے تحت آنے والا رقبہ۔

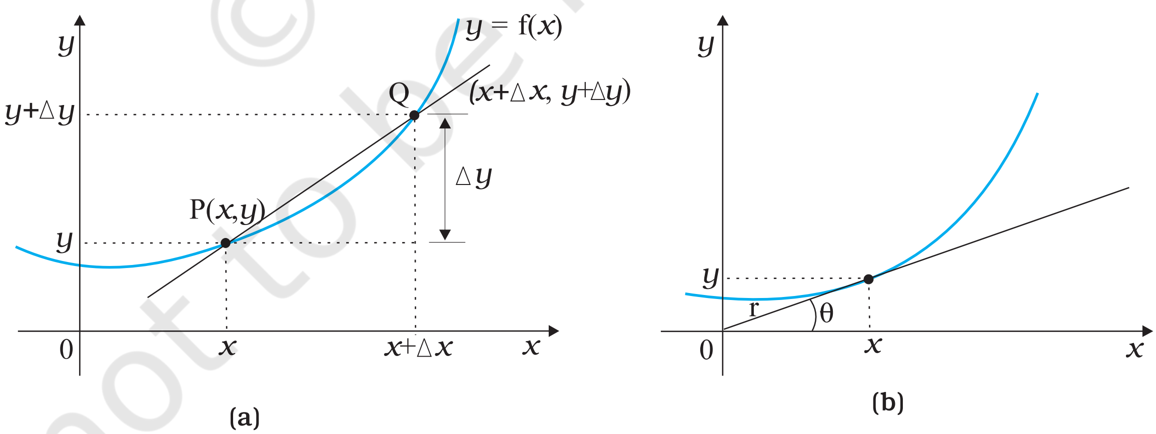
ضمیمہ 3.1: احصا کے جز (Elements of Culculus)

تفرقی ضریب یا مشتق (Differential coefficient or derivative) کے تصور کو استعمال کرتے ہوئے ہم 'رفتار' اور اسراع کی بہ آسانی تعریف کر سکتے ہیں۔ حالانکہ مشتق کے بارے میں آپ ریاضی میں تفصیل سے سیکھیں گے، ہم اس ضمیمہ میں آپ کو اِس تصور سے متعرف کرا رہے ہیں تا کہ حرکت میں شامل طبیعی مقداروں کو بیان کرنے میں آپ کو یہ تصور استعمال کرنے میں سہولت ہو۔

فرض کیجیے کہ ایک مقدار y ہے، جس کی قدر واحد متغیرہ x کے تابع ہے؛ اور اسے ایک ایسی مساوات کے ذریعے ظاہر کیا جاتا ہے، جس میں y کی تعریف x کے کسی مخصوص تفاعل کی شکل میں کی جاتی ہے۔ اس کو ایسے ظاہر کیا جاتا ہے:

$$y = f(x) \qquad (1)$$

اس رشتہ کو تصور کرنے کے لیے ہم تفاعل: $y = f(x)$ کا ایک گراف کھینچ سکتے ہیں، جس میں y اور x کو کارتیزی مختصات (کارتیزی کوآرڈی نیٹ cartesian coordinates) مانا جائے، جیسا کہ شکل (a) 3.30 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 3.30

منحنی $y = f(x)$ پر، ایک نقطہ P لیں، جس کے کوآرڈی نیٹ (x,y) ہیں، اور ایک دوسرا نقطہ Q لیں، جس کے کوآرڈی نیٹ $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ ہیں۔ P اور Q کو ملانے والے خط کا ڈھلان (slope) دیا جاتا ہے:

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y + \Delta y) - y}{\Delta x} \qquad (2)$$

اب فرض کیجیے کہ نقطہ Q، منحنی پر، نقطہ P کی سمت میں حرکت کرتا ہے۔ اس عمل میں Δx اور Δy کی قدر کم ہوجاتی ہے، یہاں تک کہ صفر کے نزدیک ہوجاتی ہے، حالانکہ ان کی نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ضروری نہیں ہے کہ صفر ہوجائے، جب: $\Delta y \to 0, \Delta x \to 0$ تو خط PQ کا کیا ہوتا ہے؟

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ منحنی پر نقطہ P پر مماس ہوجاتا ہے، جیسا کہ شکل (b) 3.30 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا مطلب ہوا کہ $\tan\theta$، P پر مماس کے ڈھلان کے نزدیک تر ہوجاتا ہے، جسے m سے ظاہر کرتے ہیں

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(y+\Delta y)-y}{\Delta x} \qquad (3)$$

جب Δx صفر کے نزدیک تر ہوتا جاتا ہے، تو نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ کی حد کو x کی مناسبت سے y کا مشتق (derivative) کہتے ہیں اور اسے $\frac{dy}{dx}$ لکھتے ہیں۔ یہ نقطہ (x,y) پر، منحنی $y = f(x)$ کے مماسی خط (Tangent line) کے ڈھلان کو ظاہر کرتا ہے کیونکہ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,f(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right] \quad y = f(x)$$

نیچے تفاعلات کے مشتقوں (derivates) کے لیے کچھ فارمولے دیے گئے ہیں۔ ان میں $u(x)$ اور $v(x)$، x کے کسی بھی منتخب کیے گئے تفاعل کو ظاہر کرتے ہیں اور a اور b مستقلہ مقداروں کی نمائندگی کرتے ہیں، جو کہ x کے تابع نہیں ہیں۔ کچھ عام تفاعلات کے مشتق بھی فہرست میں شامل ہیں:

$$\frac{d(au)}{dx} = a\frac{du}{dx} \quad ; \quad \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \quad ; \quad \frac{d(u/v)}{dx} = \frac{1}{v^2}\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right)$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad ; \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \quad ; \quad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\mathrm{cosec}^2\, x$$

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{see}\, x) = \tan x . \mathrm{see}\, x \quad ; \quad \frac{d}{dx}(\mathrm{cosu}\, x) = -\cot x\, \mathrm{cosec}\, x$$

$$\frac{d}{dx}(u)^n = n u^{n-1}\frac{du}{dx} \quad ; \quad \frac{d}{du}(\ln u) = -\frac{1}{u}$$

$$\frac{d}{du}(e^u) = e^u$$

مشتقوں کی شکل میں، ساعتی رفتار (instantanious velocity) اور اسراع کی تعریف کی جاتی ہے:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad ; \quad a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

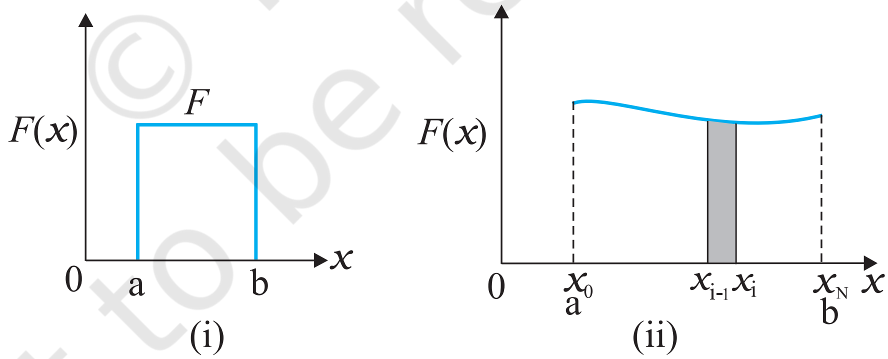
تکمُلی احصا (inteqral calculus)

آپ رقبہ کے تصور سے واقف ہیں۔ آپ سادہ جیومیٹریائی شکلوں کے رقبوں کے فارمولے بھی جانتے ہیں۔ مثلاً، ایک مستطیل کا رقبہ لمبائی ضرب چوڑائی ہوتا ہے اور ایک مثلث کا رقبہ اس کے قاعدے اور اونچائی کے حاصلِ ضرب کا آدھا ہوتا ہے۔ لیکن ایک غیر ہموار شکل (irregular figure) کا رقبہ کیسے معلوم کریں؟ ایسے مسئلوں کے حل کے لیے تکملی احصا (integral calculus) کا ریاضیاتی تصور ضروری ہے۔

ایک ٹھوس مثال لیتے ہیں۔ فرض کیجیے کہ ایک متغیرہ قوت f (x) ایک ایسے ذرّے پر لگ رہی ہے جو x- محور پر x=a سے x=b تک حرکت کر رہا ہے۔ ہمارا مسئلہ یہ ہے کہ ہم معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ اس حرکت کے دوران قوت کے ذریعے ذرّہ پر کیا گیا کام w کتنا ہے۔

اس مسئلہ سے باب 6 میں بحث کی گئی ہے۔

شکل (3.31) میں x کے ساتھ F(x) کی تبدیلی دکھائی گئی ہے۔ اگر قوت مستقلہ ہوتی تو کام، رقبہ F(b–a) ہوتا، جیسا کہ شکل 3.31(i) میں دکھایا گیا ہے۔ لیکن عمومی صورت میں، قوت، متغیرہ ہے۔



شکل 3.31

جہاں x_i، پٹّی کی چوڑائی ہے، اور ہم نے ہر پٹّی کی چوڑائی یکساں مانی ہے۔ آپ ہوسکتا ہے، سوچ رہے ہوں کہ ہمیں مندرجہ بالا ریاضیاتی عبارت میں $F(x_{i-1})$ رکھنا چاہیے یا $F(x_i)$ اور $F(x_{i-1})$ کی اوسط قدر۔ اگر ہم N کو بہت بڑا لے لیں $(N \to \alpha)$، تو اس سے دراصل کوئی فرق نہیں پڑتا، کیونکہ پٹّی اب اتنی پتلی ہے کہ $F(x_i)$ اور $F(x_{i-1})$ میں فرق تقریباً صفر

ہے۔اب منحنی کے اندر کا کل رقبہ ہے:

$$A=\sum_{i=1}^{N}\Delta A_i=\sum_{i=1}^{N}F(x_i)\Delta x$$

جب $N\to\alpha$ تو اس حاصل جمع کی حد، a سے b تک x پر F(x) کا تکملہ (integral) کہلاتی ہے۔اسے ایک مخصوص علامت دی گئی ہے، جیسا کہ ذیل میں دکھایا گیا ہے۔

$$a=\int_a^b f(x)dx$$

تکملہ علامت $\int$ ایک لمبے s جیسی معلوم ہوتی ہے جو ہمیں یاد دلاتی ہے کہ یہ بنیادی طور پر ارکان کی لا متناہی تعداد کا حاصلِ جمع ہے۔

ایک اہم ترین ریاضیاتی حقیقت یہ ہے کہ ایک معنی میں، تکمل (intergration) تفرق (differentiation) کا معکوس (inverse) ہے۔

فرض کیجیے، ہمارے پاس ایک تفاعل g(x) ہے، جس کا مشتق (derivative)، f(x) ہے۔یعنی کہ: $f(x)=\frac{d}{dx}g(x)$

تفاعل g(x)، $f(x)$ کا غیر معین تکملہ (indefinite integral) کہلاتا ہے، اور اسے ظاہر کرتے ہیں:

$$g(x)=\int f(x)dx$$

ایک تکملہ جس میں اوپری اور نچلی حدیں ہوں، ایک معین تکملہ (definite integral) کہلاتا ہے۔یہ ایک عدد ہے۔غیر معین تکملہ کی کوئی حدیں نہیں ہوتیں، یہ ایک تفاعل ہے۔

ریاضی کے ایک بنیادی مسئلہ (theorem) کا بیان ہے:

$$\int_a^b f(x)\,dx=g(x)\Big|_a^b\equiv g(b)-g(a)$$

مثال کے لیے، فرض کیجیے: $f(x)=x^2$ اور ہم معین تکملہ کی، $x=1$ سے $x=2$ تک، قدر معلوم کرنا چاہتے ہیں۔وہ تفاعل g(x) جس کا مشتق x^2 ہے، $\frac{x^3}{3}$ ہے۔اس لیے

$$\int_1^2 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

ظاہر ہے کہ معین تکملوں کی قدر معلوم کرنے کے لیے، ہمیں ان کے مطابق غیر معین تکملے معلوم ہونا چاہئیں۔کچھ عام غیر معین تکملے ہیں:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \left(\frac{1}{x}\right) dx = \ln x \qquad (x > 0)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x \qquad \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

تفرقی اور تکملی احصاء کا یہ تعارف باضابطہ نہیں ہے اور اس کا مقصد آپ کو احصاء کے بنیادی تصورات سے واقف کرانا ہے۔