ضمیمہ 2

ریاضیاتی نمونہ بندی
(MATHEMATICAL MODELLING)

A.2.1 تعارف (Introduction)

پچھلی کچھ صدیوں میں ہماری ترقی نے نہ یہ ضروری کر دیا ہے کہ ہم ریاضیاتی طریقوں کو اپنی حقیقی زندگی کے مسئلوں کو جو مختلف دائروں، میدانوں، چاہے یہ سائنس ہو مالیاتی مشغلہ (Finance)' انتظام (Management) وغیرہ کے حل کرنے میں استعمال کریں۔ ریاضی کا کمپیوٹر کی بڑھتی ہوئی تحاسبی طاقت (Computational Power) اور تحاسبی طریقے' دونوں نے لمبے لمبے اور پیچیدہ مسئلوں کو حل کرنے میں نمایاں رول ادا کیا ہے۔ حقیقی۔ زندگی کے مسئلہ کو ریاضی شکل میں تبدیل کرنے میں کچھ مسئلوں کو بہترین طریقے سے دکھایا جا سکتا ہے۔ اس ترجمہ (Translation) یا تبدیل کرنے کے طریقے کو ریاضی نمونہ (Mathematical Modelling) کہتے ہیں۔

یہاں ہم آپ کو ان اقدامات (Steps) سے روشناس کرائیں جو اس طریقہ میں استعمال ہوتے ہیں۔ کچھ مثالوں کے ذریعہ ہم سب سے پہلے ایک ریاضی نمونہ کی بات کریں گے، پھر ہم ان اقدام پر بحث و مباحثہ کریں گے جو ماڈل بنانے کے طریقے میں استعمال کئے گئے ہیں۔

A.2.2 ابتدائیہ (Preliminaries)

ریاضیاتی نمونہ بنانا دنیا کو سمجھنے کے لئے ایک ضروری ذریعہ ہے قدیم زمانے میں چینی، مصری، ھندوستانی، بے بی لونیس اور گریکس کے رہنے والے اپنی ریاضی کی معلومات کے ذریعہ قدرتی مسائل کو سمجھنے اور پیش گوئی (Predicting) کرنے میں اس کا استعمال کرتے تھے۔ ماہرِ تعمیرات (architects)، موسیقی کار (artisans) اور نقشہ نویس (Craftsmen) کا زیادہ تر

کام کا طریقہ (art) جیومیٹری اصولوں پر مبنی تھا۔

مان لیجئے ایک زمینوں کی ناپ تول کرنے والا (Surveyor) ایک ٹاور کی اونچائی معلوم کرنا چاہتا ہے لمبائی ناپنے والے فیتے سے اونچائی معلوم کرنا بہت مشکل ہے۔ اسطرح دوسرا طریقہ ہے جوان اجزاء کو بتائیں جو اونچائی معلوم کرنے کے کام میں آتے ہیں۔ اپنی ٹرگنومیٹری کی معلومات سے یہ جانتا ہے کہ اگر اسکے پاس ایک بلندی (elevation) کا زاویہ ہے اور ٹاور کے پیروں کا فاصلہ اس نقطے سے جہاں وہ کھڑا ہے، تو وہ ٹاور کی اونچائی معلوم کرسکتا ہے۔

اس طرح اسکا کام آسان ہوگیا ہے کہ کسطرح ٹاور کے اوپری سرے کا بلندی کا زاویہ معلوم کیا جائے اور ٹاور کے پیروں کا فاصلہ جہاں وہ کھڑا ہے۔ یہ دونوں کا ناپنا آسان ہوگیا ہے۔ اس لئے، اگر وہ بلندی کا زاویہ ناپتا ہے جو 40^0 اور فاصلہ 45 میٹر ہے، تو مسئلہ آسانی سے حل کیا جاسکتا ہے جیسا کہ مثال '1' میں دیا گیا ہے۔

مثال 1 ٹاور کے اوپری سرے کا بلندی کا زاویہ زمین پر نقطہ جو کہ ٹاور کے پیروں سے 450 میٹر کی دوری پر ہے 40^0 کا ہے۔ ٹاور کی اونچائی معلوم کیجئے۔

حل ہم اسے مختلف طریقوں سے حل کرسکتے ہیں۔

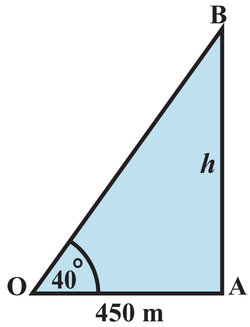
قدم 1 ہم پہلے مسئلہ کی حقیقت کو سمجھیں گے۔ مسئلہ میں ایک ٹاور دیا گیا ہے اور اسکی اونچائی ناپنی ہے۔ مان لیجئے '1' سے ظاہر ہوتی ہے۔ یہ دیا ہوا ہے کہ ٹاور کے پیر کا افقی (Horizontal) فاصلہ زمین پر خاص نقطہ 0 سے 450 میٹر ہے۔ مان لیجئے اس فاصلہ کو 'd' سے ظاہر کیا گیا ہے۔ تب $d=450$ میٹر ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ بلندی کا زاویہ θ سے ظاہر کیا گیا ہے جو کہ 40^0 ہے۔ اسلئے ٹاور کی اونچائی h معلوم کرنی ہے 'فاصلہ d اور بلندی کا زاویہ θ استعمال کریئے۔

قدم 2 تین مقداریں جو مسئلہ میں دکھائی گئی ہیں وہ اونچائی، فاصلہ اور بلندی کا زاویہ ہے۔

اسلئے ہم اسطرح کے رشتے کو دیکھتے ہیں جو ان تینوں مقداروں کو ملا سکے، یہ اسوقت حاصل ہوا ہے جب ذیل طریقے سے اسے جیومیٹریہ انداز سے بیان کیا گیا ہے۔

AB ٹاور کو ظاہر کرتا ہے۔ OA ٹاور کے پیر سے نقطہ O تک کا افقی فاصلہ دیتا ہے۔ زاویہ $\angle AOB$ بلندی کا زاویہ ہے۔

تب ہمارے پاس ہے۔



شکل 1

$$\tan\theta = \frac{h}{d} \quad \text{یا} \quad h = d\tan\theta$$

یہ ایک مساوات ہے جو θ, h اور d کو جوڑتی ہے۔

قدم 3 ہم h کو حل کرنے کے لئے مساوات (1) کا استعمال کرتے ہیں۔

ہمارے پاس ہے $q = 40°$ اور $d = 450$ تب ہمیں $h = \tan 40° \times 450 =$ $450 \times 0.839 = 377.6\text{m}$ میٹر حاصل ہوتا ہے۔

قدم 4 اس طرح ہم نے ٹاور کی اونچائی معلوم کرلی ہے (حاصل کرلی ہے) جو کہ تقریباً 378 میٹر ہے۔

اب ہمیں ان مختلف اقدام پر غور کرنا چاہئے، جو مسئلہ حل کرنے میں استعمال کئے گئے ہیں۔ قدم 1 میں، اصل مسئلہ کے بارے میں پڑھا اور دیکھا کہ مسئلہ میں تین پیرامیٹرس (Parameters) شامل ہیں اونچائی ' فاصلہ اور بلندی والا زاویہ اسکا مطلب ہے اس قدم میں ہم نے اصل زندگی کے مسئلہ کو پڑھا اور پیرامیٹرس کی نشان دہی کی۔ قدم '2' میں ' ہم نے کچھ جیومیٹری کا استعمال کیا اور دیکھا کہ مسئلہ کو جیومیٹریہ انداز سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جیسا کہ شکل (1) میں دکھایا گیا ہے۔ تب ہم نے 'Tan' فنکشن کے لئے ٹرگنومیٹرک نسبت کا استعمال کیا اور رشتہ کو حاصل کیا جو اسطرح ہے

$$h = d\tan\theta$$

اس لئے اس قدم میں ہم نے مسئلہ کو ریاضیاتی فارمولے میں دکھایا ہے۔ اسکا مطلب ہے ہم نے ایک مساوات حاصل کرلی ہے جو حقیقی مسئلہ کا اظہار کررہی ہے۔

قدم 3 میں ہم نے ریاضیاتی مسئلہ کو حل کیا ہے اور $h = 377.6\text{m}$ حاصل کیا ہے۔ اسکا مطلب ہے ہمیں مسئلہ کا حل مل گیا ہے۔

آخری قدم میں ہم نے مسئلہ کے حل کو دوسرے انداز سے ظاہر کیا ہے اور کہا ہے کہ ٹاور کی اونچائی تقریباً 378 میٹر ہے۔ ہم اسے اس طرح بیان کرتے ہیں۔

ریاضیاتی حل کو حقیقی حالات کے انداز سے ظاہر کرنا

دراصل میں یہ وہ اقدام ہیں جو ریاضی داں اور دوسرے حضرات زندگی کے بہت سے حقیقی حالات میں استعمال کرتے ہیں۔

ہم اس سوال پر غور کریں گے کہ ''ریاضی کا استعمال کیوں ضروری ہے مختلف حالات کو حل کرنے کے لئے''۔

یہاں کچھ مثالیں ہیں جہاں ریاضی کا بہت سے حالات میں با اثر طریقے سے استعمال کیا گیا ہے۔

1. خون کے صحیح انداز سے بہنے کے لئے یہ ضروری ہے کہ آکسیجن اور دوسرے غذائی اجزاء (nutrients) انسانی جسم کے مختلف حصّوں میں بھیجے جائیں اور ایسا ہی دوسرے جانورں میں بھی ہے۔

خون کی نالیوں میں کوئی بھی رکاوٹ یا خون کی نالیوں میں کوئی بھی تبدیلی خون کے بہاؤ کو بدل سکتی ہے اور یہ معمولی تکلیف سے اچانک موت کی وجہ ہوسکتی ہے۔ مسئلہ خون کے بہاؤ اور خون کی نالیوں (blood Vessels) کی عضویاتی خصوصیت کے درمیان رشتہ معلوم کرنے کا ہے۔

2. کرکٹ میں تیسرا امپائر LBW کا فیصلہ لیتا ہے کیپر کی حالت دیکھتے ہوئے۔ یہ نقل کرتے ہوئے کہ بلے باز وہاں نہیں ہے۔ اب یہاں ریاضیاتی مساواتیں آجاتی ہیں۔ جو اس بات پر مبنی ہیں کہ کیپر کا کیا راستہ تھا بلّے باز کی ٹانگ میں لگنے سے پہلے یہ نقل کرنے کا نمونہ LBW فیصلہ لینے میں استعمال کیا جاتا ہے۔

3. موسمی پیشین گوئی کرنے والا شعبہ موسم کی پیشین گوئی ریاضیاتی نمونوں کی بنا پر کرتا ہے۔ کچھ پیرامیٹرس جو موسم کے حالات میں تبدیلی لاتے ہیں' درجہ حرارت' ہوا کا دباؤ' نمی (humidity) ہوا کی رفتار وغیرہ ہیں۔ جو آلات ان پیرامیٹر ہوا کا دباؤ ناپنے کے لئے ' استعمال کئے جاتے ہیں ان میں تھرمامیٹر درجہ حرارت ناپنے کے لئے' بیرومیٹر ہوا کا دباؤ ناپنے کے لئے ' ہائیگرومیٹر نمی ناپنے کے لئے اینی مومیٹر (anemometers) ہوا کی رفتار ناپنے کے لئے۔ ایک بار یہ آنکڑے (data) ملک میں موجود مختلف اسٹیشنوں کے ملنے کے بعد کمپیوٹرس میں ڈال دئے جاتے ہیں تا کہ تجزیہ کیا جا سکے اور پھر پیشنگوئی کی جا سکے۔

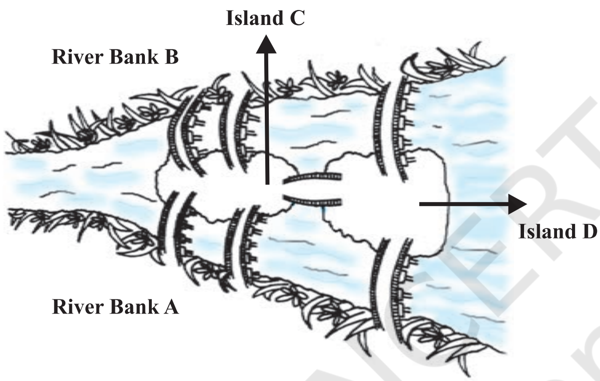
4. کھیتی باڑی کا شعبہ یہ چاہتا ہے کہ ہندوستان میں چاول کی پیداوار اکی کھڑی ہوئی فصل سے اندازہ لگا سکے۔ سائنس داں علاقوں کی نشان دہی کرتے ہیں جہاں چاول کی کھیتی ہوتی ہے اور وہاں کے ایک کھیت سے فصل کاٹ کر جو وہاں کی نمائندگی کرتا ہے اور پھر اسکا وزن کرکے یہ پتہ لگاتے ہیں کہ فی ایکڑ کتنی پیداوار ہوگی۔ ان ریاضیاتی طریقوں سے چاول کی درمیانی پیداوار کے بارے میں فیصلہ لیا جاتا ہے۔

اس طرح کے مسئلہ کو حل کرنے میں ریاضی داں کسطرح مدد کرتے ہیں؟ وہ ماہرین کے ساتھ ان علاقوں میں بیٹھے ہیں' مثال کے طور پر پہلے مسئلہ میں ایک Physiologist مسئلہ کے لئے ایک ریاضیاتی برابری پر کام کرتا ہے۔ اس برابری

میں ایک یا زیادہ مساواتوں اور حل کو ابتدائی مسئلہ کے رکن میں اندازہ لگاؤ۔ طریقہ کو بیان کرنے سے پہلے ہم اس پر بات چیت کرلیں کہ ریاضیاتی نمونہ کیا ہے۔

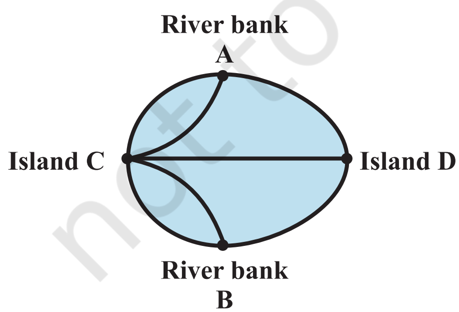
ریاضیائی نمونہ اظہار کرنے کا ایک طریقہ ہے جو حالات کو پوری طرح سمجھا دیتا ہے۔ ذیل مثال میں ایک دلچسپ جیومیٹر یہ نمونہ دکھایا گیا ہے۔

مثال 2 (پل کا مسئلہ) (Bridge problem) کونگسبرگ (Konigsberg) دریائے پرپگل (Pregel River) پر ایک شہر ہے جو 18 ویں صدی میں ایک جرمنی شہر تھا، لیکن اب روس (Russian) میں ہے۔ شہر میں دو دریائی ٹاپو (Islands) ہیں جو کناروں سے سات پلوں کے ذریعہ جوڑے گئے ہیں جیسا کہ (شکل 2) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 2

لوگ شہر کے چاروں طرف اس طرح چہل قدمی کرنا چاہتے ہیں کہ وہ پل کو صرف ایک بار پار کریں، لیکن یہ بہت ہی مشکل مسئلہ ہے۔ لیون ہارڈ یولر (Leonhard Euler) ایک سوئیز (Swiss) کا ریاضی داں جو کہ روسی ریاست بلن کیتھرائین (Catherine The Great) میں نوکری کرتا تھا، اس نے اس مسئلہ کے بارے میں سنا، 1736 میں یولر نے ثابت کردیا کہ اسطرح چہل قدمی کرنا ممکن نہیں ہے۔ اس نے ایک دوسری طرح کی شکل ایجاد کرکے ثابت کردیا جسے نیٹ ورک (Network) کہا جاتا ہے، جو کہ راسوں کا بنا ہے (نقاط جہاں خطوط ملتے ہیں) اور کمان (arcs) (شکل 3)



شکل 3

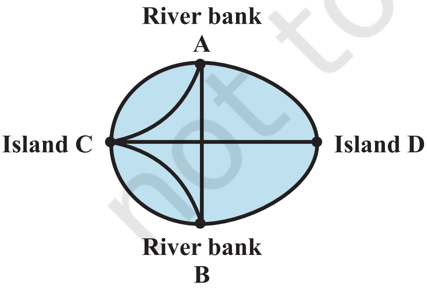
اسنے دو دریا کے کنارے اور دو ٹاپوؤں کے لئے چار نقطوں

کا استعمال کیا تھا۔انہیں A، B، C اور D دکھایا گیا ہے۔سات (arcs) سات پل ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ 3 پل دریا کے کنارے A کو ملاتے ہیں ، اور تین دریا کے B کنارے کو ملاتے ہیں۔S پل (arcs) ٹاپو C کو ملاتے ہیں اور 3 ٹاپو D کو ملاتے ہیں۔اس کا مطلب ہے تمام راس، قوس (arcs) کا طاق عدد رکھتے ہیں، اسلئے انہیں طاق راس کہا جاتا ہے۔(ایک جفت راس، قوس کے جفت اعداد کو ملاتا ہے۔)

یہ ذہن نشین کر لیجئے کہ مسئلہ کے چاروں طرف گھوم کر پل کو ایک بار پار کرنے کا تھا۔ یولر کے نیٹ ورک کا مطلب ہے کہ ہر قوس سے ایک بار گزرنا اور ہر راس سے گزرنا جو یولر نے ثابت کیا ہے نہیں ہوسکتا تھا کیوں کہ اسنے کیا ہے، ایک طاق راس حاصل کرنے کے لئے تمہیں اپنا سفر شروع یا ختم ایک راس سے کرنا ہوگا۔(اس کے بارے میں غور کیجئے) کیونکہ صرف ایک ابتدا ہوسکتی ہے اور ایک آخیر، یہاں صرف دو طاق راس ہوسکتے ہیں اگر تمہیں ایک قوس سے ایک بار ہو کر گزرنا ہے۔کیوں کہ پل کے مسئلہ میں 4 طاق راس ہیں، یہ فی الحال کرنا ممکن نہیں ہے۔

یولر کے اس مسئلہ (Theorem) کو حل کرنے کے بعد کونگسبرگ (Konigsberg) کے پل کے نیچے بہت زیادہ پانی بھر دیا گیا ہے 1875 میں کونگسبرگ میں ایک فالتو پل بنایا گیا ہے جو زمینی رقبہ A اور D کو جوڑتا ہے۔(شکل 4) کیا اب کونگسبرگ میں رہنے والوں کے لئے یہ ممکن ہے کہ وہ شہر کے چاروں طرف چکّر لگانے کے لئے ہر پل کا ایک بار استعمال کریں؟

یہاں اب حالات شکل 4 میں دکھائے گئے طریقے پر مبنی ہیں۔ایک نئے شکل 4 کنارے کو جوڑنے کے بعد، دونوں راس A اور D اب جفت 3 گری راس ہوگئے ہیں۔حالانکہ B اور C کی ابھی بھی طاق ڈگری ہیں۔اسلئے کونگسبرگ میں رہنے والوں کے لئے یہ ممکن ہے کہ وہ شہر کا چاروں طرف چکر لگانے کے لئے ایک پل کا صرف ایک بار استعمال کریں۔



شکل 4

نیٹ ورک کی اس ایجاد نے ایک نئے نظریہ کو جگہ دی ہے جسے ہم نظریہ گراف (Graph Theory) کہتے ہیں جو اب مختلف طریقوں میں استعمال کی جاتی ہے، جس میں ریلوے نیٹ ورک کی منصوبہ بندی اور نقشہ نویسی (Mapping) بھی شامل ہیں۔

A.2.3 ریاضیاتی نمونہ بندی کیا ہے؟ (What is Mathematical Modelling?)

یہاں ہم یہ بیان کریں گے کی ریاضیاتی نمونہ بندی کیا ہے اور مثالوں کے ذریعہ یہ دکھائیں گے کہ اس میں مختلف طریقے کس طرح شامل ہیں۔

تعریف ریاضیاتی نمونہ بندی حقیقی زندگی میں مسئلوں کے مطالعہ کی ایک کوشش ہے جس میں کچھ حصّے (یا ان کی شکل) کو ریاضیاتی ارکان میں ظاہر کرنے کی۔

طبعی حالت کو ریاضی میں ڈھالنا کچھ ساز گار شرائط کے ساتھ ریاضیاتی نمونہ بندی کہا جاتا ہے۔ ریاضاتی نمونہ بندی اور کچھ نہیں ہے صرف ایك طریقہ ہے اور معلّمی (پڑھائی) (Pedagogy) جیسے موسیقی (Fine arts) سے لیا گیا ہے نہ کہ ابتدائی سائنس (Basic Sciences) سے۔ اب ہم ان مختلف طریقوں کو جانتے ہیں جو ریاضیاتی نمونہ بندی میں استعمال ہوتے ہیں۔ اس طریقے میں '4' اقدامات ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر سادہ لنگر (Simple pendulum) کی حرکت کی جانکاری میں جو نمونہ بندی کی گئی ہے اس پر غور کرتے ہیں۔

مسئلہ کو سمجھنا (Understanding the Problem)

آسان پنڈولم اس میں شامل ہے، مثال کے طور پر سادہ لنگر کی حرکت کے طریقے کو سمجھنا۔ ہم سب سادہ لنگر کے بارے جانتے ہیں۔ یہ لنگر صرف ایک وزن ہے (جسے گھڑی کا لٹکن کہتے ہیں) جو ڈوری کے ایک سرے سے جڑا ہوتا ہے اور جسکا دوسرا سرا ایک مقرر نقطے سے۔ ہم پڑھ چکے ہیں کہ آسان پینڈولم کی حرکت دوری (Periodic) ہوتی ہے۔ وقفہ ڈوری کی لمبائی پر منحصر ہے اور زمین کی قوت کشش (gravity) کی وجہ سے ہونے والے (اسراع acceleration)، اس طرح ہمیں ضرورت ہے لرزش (Oscillation) کا وقفہ معلوم کرنے کی۔ اس پر مبنی ہم مسئلہ کا ایک مختصر بیان دیتے ہیں۔

بیان (Statement)

ہم ایک سادہ لنگر کے لرزش کا وقفہ کس طرح معلوم کریں گے؟

دوسرا قدم قاعدہ بنانے کا ہے۔

قاعدہ بنانا (Formulation)

اس میں دو اصل اقدام ہوتے ہیں۔

1. تعلق رکھنے والے اجزائے ضربی کی پہچان کرنا (Identifying the relevant factors)

اس میں ہم یہ معلوم کرتے ہیں کی اجزائے ضربی کیا ہیں/ مسئلہ میں ملوث پیرامیٹر س (Parameters) مثال کے طور پر، پینڈولم کے کیس میں اجزائے ضربی لرزش (T) کے وقفے ہیں، بوب کا وزن (m) 'پنیڈ ولم کی اثر انداز لمبائی (l) جو باب کے مرکز سے لٹکنے والے نقطے کے درمیان کا فاصلہ ہے یہاں ہم ڈوری کی لمبائی کو پنیڈ ولم کی اثر دار لمبائی مانتے ہیں اور زمین کے کھینچاؤ کی وجہ سے (اسراع (g) ' جسے ہم ایک جگہ پر مقرر مان لیتے ہیں۔

اس طرح ہم نے مسئلہ کو جاننے کے لئے چار پیرامیٹرس کی شناخت کی ہے۔اب ہمارا مقصد T کی قیمت معلوم کرنا ہے، اس کے لئے ہمیں یہ جاننا ضروری ہے کہ وہ کون سے پیرامیٹرس ہیں جو وقت پر اثر ڈالتے ہیں جو ایک آسان تجربہ کرنے سے معلوم ہوسکتا ہے۔

ہم دو دھات کی گیندیں مختلف وزن کی لیتے ہیں اور ان کے سات برابر ڈوری کی لمبائی کے ساتھ تجربہ کرتے ہیں ۔ہم لرزش (Oscillation) کا وقفہ معلوم کرتے ہیں۔ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ وقفہ میں وزن کے ساتھ کوئی نمایاں تبدیلی نہیں ہوئی ہے۔اب ہم اسی طرح تجربہ برابر وزن والی گیندوں کو لیکر کرتے ہیں لیکن اس وقت ڈوری کی لمبائیاں مختلف ہیں۔اب ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ لرزش کا وقفہ پنڈ ولم کی لمبائی پر منحصر ہے۔

اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ وقفہ معلوم کرنے کے لئے وزن (m) ایک ضروری پیرا میٹر نہیں ہے جبکہ لمبائی 'l' ایک ضروری پیرا میٹر ہے۔

یہ ضروری پیرامیٹرس کی کھوج کرنے کا طریقہ ضروری ہے اس سے پہلے کہ ہم دوسرا قدم اٹھائیں۔

2. ریاضیاتی وضاحت (Mathematical description)

اس میں مساوات کا معلوم کرنا' نا مساوات یا جیومیٹرک شکل پہلے معلوم کئے گئے پیرامیٹرس کا استعمال کر کے۔

آسان پینڈولم کے کیس میں تجربہ کیئے گئے تھے جن میں T کی قیمت معلوم کی گئی تھی 'l' کی مختلف قیمتوں کے لئے، ان قدروں کو گراف پر دکھایا گیا جن کا نتیجہ ایک منحنی (Curve) تھا جسکی شکل مکافی (Parabola) سے ملتی جلتی ہے۔اس سے

یہ حل نکلتا ہے کہ **T** اور l کے بیچ میں رشتہ اس طرح ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$T^2 = kl \qquad \text{(1)...}$$

یہ معلوم کیا گیا تھا کہ $k = \dfrac{4\pi^2}{g}$ یہ مساوات دیتا ہے۔

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{(2)...}$$

مساوات (2) مسئلہ کا ریاضیاتی قاعدہ دیتے ہے۔

حل معلوم کرنا (Finding the Solution)

ریاضیاتی قاعدہ بہت کم سیدھا جواب دیتا ہے۔ عام طور پر ہمیں کچھ ردوبدل کرنی پڑتی ہے جس میں مساوات کا حل کرنا، حساب لگانا یا پھر کسی مسئلہ کا استعمال (apply) کیا جانا وغیرہ، آسان پینڈولم کے کیس میں حل میں مساوات (2) میں دیا گیا ہے فارمولہ کو استعمال کیا گیا ہے لرزش (oscillation) کا وقفہ جو دو مختلف پینڈولم کے لئے نکالا گیا ہے جنکی لمبائیاں مختلف تھیں جدول (1) میں دیا گیا ہے۔

جدول 1

l	225 cm	275 cm
T	3.04 sec	3.36 sec

جدول یہ دکھاتا ہے کہ سم l=225 کے لئے T=3.04 Sec اور l=2756 ہے۔

ترجمانی کرنا/جائزہ لینا (Interpretation/Validation)

ریاضیاتی نمونہ اصل زندگی کی ضروری خصوصیات کو سمجھنے کی ایک کوشش ہے۔ بہت بار نمونہ مساوا تیں حالات کو بہترین انداز میں رکھنے پر حاصل ہوتی ہیں۔ یہ ماڈل صرف اسوقت کام میں آئے گا جب یہ ساری حقیقتیں بیان کرے جو ہم سمجھانا چاہتے ہیں۔ ورنہ ہم اسے نامظور کر دیں گے یا پھر اسے بہتر کریں گے، تب دوبارہ اس کی آزمائش کی جائے گی۔ دوسرے الفاظ میں ہم ماڈل کتنا اثر انداز ہے دیکھنے کے لئے اس کے نتیجوں کا اصل زندگی کی اصلیت سے موازنہ کریں گے۔ یہ طریقہ ماڈل کا معقول ہونے کا جائزہ دیتا ہے۔ آسان پینڈولم کے کیس میں ہم

پینڈولم پر کچھ تجربہ کرتے ہیں اور لرزش (Oscillation) کے وقفہ معلوم کرتے ہیں۔ ان تجربوں کے نتیجے جدول '2' میں دئے گئے ہیں۔

جدول 2

چار مختلف پینڈولموں کے لئے تجربوں سے وقفے حاصل کئے گئے ہیں۔

Mass (gms)	Lenfgth	Time (secs)
385	275	3.371
	225	3.056
230	275	3.352
	225	3.042

اب ہم معلوم کی گئی جدول 2 کی قدروں کا موازنہ جدول '1' میں حاصل کی گئی (Calculated) قدروں سے کرتے ہیں مشاہدہ کی گئی قدروں اور حاصل کی گئی قدروں کا فرق غلطی (error) دیتا ہے مثال کے طور پر m l=275 کے لئے اور وزن گرام m=385

error =3.371- 3.36 = 0. 011

جو کہ بہت چھوٹی ہے اس لئے ماڈل کو منظور کیا جاتا ہے۔

جب ہم ایک بار ماڈل کو منظور کرلیں تب ہمیں ماڈل کی ترجمانی کرنی ہوگی حل کو بیان کرنے کا طریقہ حقیقی زندگی کو مدِ نظر رکھ کر ماڈل کی ترجمانی کہلاتا ہے ۔اس کیس میں ہم حل کی ترجمانی ذیل طریقے سے کرتے ہیں۔

(a) وقفہ ' پنڈولم کی لمبائی کے جزرالمربع کے directly proportional ہے۔

(b) یہ زمین کی کشش کی وجہ سے ہونے والے اسراع کے جزرالمربع کے (Inversely proportional) ہے

ہماری اس ماڈل کا جائزہ لگانا اور ترجمانی کرنا یہ دکھاتا ہے کہ ریاضیات ماڈل ایک اچھے قرار میں ہے تجربہ (یا مشاہدہ) کے ذریعے حاصل شدہ قدروں کا لیکن ہمیں یہ حاصل ہوا ہے کہ نکالے گئے اور ناپے گئے نتیجوں میں کچھ غلطی ہے۔ یہ اس لئے ہے کہ ہم نے ڈوری کے وزن کو نظر انداز کر دیا ہے اور ساتھ ہی میڈیم کی مفاہمت (resistance) کو اس طرح' ایسے حالات

میں ہم ایک بہتر ماڈل کی جانب دیکھتے ہیں اور سلسلہ کو جاری رکھتے ہیں۔

یہ ہمیں ایک خاص مشاہدہ کی طرف لے جاتا ہے۔حقیقی دنیا بہت دور اور پیچیدہ (Complex) اسے مکمل جانے اور بتانے کے لئے ہم ایک یا دو اصل جزو ضربی لیتے ہیں جو مکمل طور پر صحیح ہیں اور جو حالت پر اثر ڈال سکیں۔۔ پھر اسکے بعد ایک آسان ماڈل حاصل کرنے کی کوشش کریں گے جو حالات پر مبنی کچھ معلومات فراہم کر سکے۔ہم اس ماڈل کے ساتھ آسان حالات کو لیں گے اور یہ امید کریں گے کہ ہم ان حالات کے لئے ایک بہتر ماڈل بنا سکیں۔

اب ہم اصل طریقہ کو چھوٹے انداز میں بیان کریں گے جو ماڈل بنانے میں استعمال ہوا ہے۔

(a) قاعدہ بنانا (Formulation) (b) حل (Solution)

(C) ترجمانی کرنا/جائزہ لیا (Interpretation/Validation)

اگلی مثال یہ دکھاتی ہے کہ گراف کے ذریعہ نامساواتوں کے حل کا مختلف طریقوں کو استعمال کر کے کیسے ماڈل بنایا جاتا ہے۔

مثال 3 ایک فارم ہاؤس کم از کم 800 کلوگرام خاص کھانا روزانہ استعمال کرتا ہے۔خاص کھانا مکّی (Corn) اور سویابین کا آمیزہ ہے جسکی ذیل ترتیب ہے۔

جدول 3

Material	Nutrients present per Kg Protein	Nutrients present per Kg Fibre	Cost per Kg
Corn	.09	.02	Rs 10
Soyabean	.60	.06	Rs 20

خاص کھانے کی ضرورت میں کم سے کم 30% پروٹین اور زیادہ سے زیادہ 5% ریشہ (fibre) ہونا چاہئے۔ ملے جلے کھانے کی کم سے کم قیمت معلوم کیجئے۔

حل قدم 1 یہاں ہمارا اصل مقصد روزانہ کھانے کی قیمت کو کم سے کم کرنا ہے جو مکّی اور سویابین سے بنا ہے۔ اسلئے مختصر (Variables) (جزوضربی) جن پر غور کرنا چاہئے یہ ہیں۔

$x=$ مکی کی مقدار

$y=$ سویابین کی مقدار

$z=$ قیمت

قدم 2 جدول 3 میں آخری کالم یہ ظاہر کرتا ہے کہ y،x،z اس مساوات سے جڑے ہوئے ہیں

$$z=10x+20y \quad \ldots(1)$$

مسئلہ یہ ہے کہ Z کی قیمت کو کم سے کم کرنا ہے جس میں ذیلِ بندش (پابندی)(Constraints) ہے:

(a) فارم میں کم سے کم 800 کلوگرام کھانا استعمال ہوتا ہے جس میں مکی اور سویابین شامل ہے

یعنی $x+y\geq 800 \quad \ldots(2)$

(b) کھانے کی ضرورت ہے کہ اسمیں کم سے کم 30% پروٹین ہو جیسا کہ نسبتاً جدول 3 کے پہلے کام میں دیا گیا ہے۔ یہ دیتا ہے۔

$$0.09x+0.6y\leq 0.3(x+y) \quad \ldots(3)$$

(c) اس طرح کھانے میں زیادہ 5% ریشہ جو جدول 3 کے کالم 2 کی نسبت میں دیا گیا ہے۔ یہ دیتا ہے۔

$$0.02x+0.06y\leq 0.05(x+y) \quad \ldots(4)$$

ہم (2)(3) اور (4) میں دی گئی پابندی کو حل کرتے ہیں x اور y کے تمام ضریب کو اس کے ساتھ ملا کر۔
تب مسئلہ ذیل ریاضیاتی شکل میں رکھا جاسکتا ہے۔

بیان (Statement)

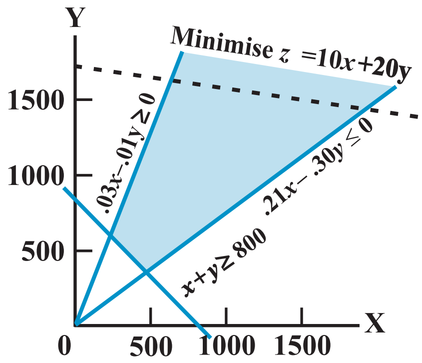
z کو کم سے کم کیجئے ذیل اصولوں کے ساتھ

$$x+y\leq 800$$

$$0.21x-.30y\leq 0$$

$$0.03x-.01y\geq 0$$

قدم 3 یہ گراف کے ذریعہ حل کیا جاسکتا ہے۔ شکل 5 میں شیڈ کیا ہوا حصّہ مساواتوں کے ممکن حل دیتا ہے۔ گراف یہ ہے بالکل صاف ہے کہ کم سے کم قیمت نقطہ (470.6,329.4) پر ہے اس کا مطلب $x=470.6$ اور $y=329.4$ ہے



Optimum: x = 470.6 kg
y = 329.4 kg
z = Rs 11294

شکل 5

یہ ہمیں Z کی قیمت اس طرح دیتا ہے

$$z = 10 \times 470.6 + 20 \times 329.4$$
$$= 11294$$

یہ ریاضیاتی حل ہے۔

قدم 4 حل کی ترجمانی اسطرح کی جاتی ہے، اور خاص کھانے کی کم سے کم قیمت جس میں مکّی اور سویا بین شامل ہیں جو مطلوبہ ضروری nutrients کی نسبت رکھتا ہے اور جس میں پروٹین اور ریشہ شامل ہیں 11294 روپئے ہے اور ہم نے کم سے کم قیمت حاصل کرلی ہے اگر ہم 470.6 کلوگرام مکّی اور 325.4 کلوگرام سویا بین کا استعمال کریں۔''

اگلی مثال میں' اس پر بات نمونہ تیار کریں گے کہ ایک ملک کی آبادی کا ایک خاص وقت پر کس طرح حساب لگایا جایا جاتا ہے۔

مثال 4 مان لیجئے ایک آبادی کو کنٹرول کرنے والا ادارہ چاہتا ہے کہ ''کسی ایک ملک میں 10 سال کے بعد کتنے لوگ ہوں گے۔''

قدم 1 تشکیل ہم سب سے پہلے یہ مشاہدہ کریں گے کہ آبادی وقت کے ساتھ بدلتی ہے اور پیدائش سے بڑھتی ہے اور موت سے گھٹتی ہے۔

ہم ایک خاص وقت پر آبادی معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ مان لیجئے 't' وقت کو سالوں میں ظاہر کرتا ہے وغیرہ وغیرہ۔ کسی بھی وقفہ t کے لئے (t) کسی خاص سال میں آبادی کو ظاہر کرتا ہے۔ اور P(t) کسی بھی (t) سال کی آبادی کو ظاہر کرتا

ہے۔اور $B(t)$ اس سال کی پیدائش کو اور $D(t)$ مرنے والوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

مان لیجئے ہم کسی خاص سال میں آبادی کو معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ مان لیجئے $t_0 = 2006$ ہم اسے کس طرح کریں گے۔ہم نے جنوری '1' 2005 تک کی آبادی معلوم کی ہے۔ پیدا ہونے والوں کی تعداد اس میں جمع کر لیجئے۔اور مرنے والوں کی تعداد گھٹا دیجئے۔ مان لیجئے $b(t)$ ایک سال میں پیدا ہونے والوں کی تعداد ظاہر کرتا ہے (t) اور $(t+1)$ کے درمیان اور $D(t)$ مرنے والوں کی تعداد (t) اور $(t+1)$ کے درمیان ظاہر کرتا ہے۔تب ہمیں یہ رشتہ حاصل ہوگا۔

$$P(t+1) = {}^{P}(t) + B(t) - D(t)$$

اب ہم کچھ assumptions اور definitions بناتے ہیں۔

1. $\dfrac{B(t)}{P(t)}$ شرح پیدائش کہلاتی ہے جسمیں وقفہ t سے (t+1) تک ہے

2. $\dfrac{D(t)}{P(t)}$ شرح موت کہلاتی ہے جسمیں وقفہ t سے (t+1) تک ہے

Assumptions

1. تمام وقفوں کیلئے شرح پیدائش یکساں ہے۔اسی طرح، تمام وقفوں کے لئے شرح موت یکساں ہے۔اسکا مطلب ہے b' 'ایک مستقل ہے' جو شرح پیدائش کہلاتی ہے اور d ایک مستقل جسے شرح موت کہا جاتا ہے تا کہ سب کے لئے $t \geq 0$

$$b = \frac{B(t)}{P(t)} \text{ اور } d = \frac{D(t)}{P(t)} \qquad (1)...$$

2. آبادی میں کوئی نیا آدمی آیا یا گیا نہیں ہے یعنی، آبادی میں ردوبدل کا ذریعہ صرف پیدائش اور موت ہے۔

1 اور assumption2 سے ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ $t \geq 0$ کے لئے

$$P(t+1) = P(t) + B(t) - D(t)$$

$$= P(t) + bP(t) - dP(t)$$

$$= (1+b-d)P(t) \qquad (2)...$$

مساوات (2) میں $t=0$ رکھنے پر ملتا ہے۔

$$P(1)=(1+b-d)P(0) \quad (3)...$$

مساوات 2 میں $t=1$ رکھنے پر ملتا ہے۔

$$P(2)=(1+b-d)P(1)$$

$$=(1+b-d)(1+b-d)P(0)$$ (مساوات 3 کا استعمال کرنے پر)

$$(1+b-d)^2P(0)$$

اس طرح آگے بڑھتے ہوئے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$P(t)=(1+b-d)^t P(0) \quad (4)...$$

$t=0,1,2,.....$ کے لئے۔ مستقل $(1+b-d)$ زیادہ تر r دکھایا جاتا ہے اور اسے شرح بڑھوتری کہا جاتا ہے یا، بہت اعلیٰ انداز میں *The Malthusian Parameter* کہا جاتا ہے Robert Malthus کی عزّت میں جس نے یہ پہلا ماڈل مشہور غور کرنے کے لئے 'r' کی نسبت میں مساوات 4 ہو جاتی ہے۔

$$P(t)=P(0)r^t,\ t=0,1,2,... \quad (5)...$$

$P(t)$ ایک *exponential function* کی مثال ہے کوئی بھی فنکشن Cr^t کی شکل کا جہاں 'c' اور 'r' مستقل کہلاتے ہیں ایک exponential function ہے۔

مساوات (5) مسئلہ کا ریاضیاتی نمونہ دیتی ہے۔

قدم 2 - حل (Solution)

مان لیجئے اس وقت موجودہ آبادی 250,000,000 ہے اور شرح $b=0.02$ اور $d=0.01$ ہے۔ دس (10) سال بعد آبادی کتنی ہوگی؟ فارمولے کا استعمال کرنے پر، ہم **P(10)** کو حل کرتے ہیں۔

$$P(10)=\left((1.10)^{10}\right)(250,000,000)$$

$$=(1.104622125)(250,000,000)$$

$$=276,155,531.25$$

قدم 3 ترجمانی کرنا/ جائزہ لینا (Interpretation/Validation)

حقیقت میں یہ نتیجہ غلط ہے، کیوں کہ کسی کے پاس 0.25 آدمی نہیں ہو سکتے۔ اس لئے ہم کچھ تقریباً کا استعمال کرتے ہیں اور اس بات پر پہنچتے ہیں کہ آبادی 276,55,531 ہے (تقریباً) یہاں ہمیں بالکل صحیح جوب نہیں مل رہا ہے assumption کی وجہ سے جو کہ ہم نے اپنے ریاضیاتی ماڈل میں کی ہے۔

اوپر دی ہوئی مثال دکھاتی ہے کہ مختلف حالات میں کس طرح ماڈلنگ کی جاتی ہے مختلف ریاضیاتی طریقوں کا استعمال کر کے۔

کیوں کہ ریاضیاتی ماڈل حقیقی مسئلہ، اظہار کرنے کا سب سے آسان طریقہ ہے اپنے کردار کی وجہ سے' ماننے اور تقریباً میں بنا ہے۔ صاف طور پر سب سے اہم سوال یہ ہے کہ کیا ہمارا ماڈل ایک اچھا ماڈل ہے یا نہیں اسکا مطلب یہ ہے کہ جب حاصل شدہ نتیجوں کی ترجمانی طبعیاتی طور پر کی گئی تو کیا ماڈل نے وجوہاتی جواب دیا یا نہیں۔ اگر ایک ماڈل بہت صحیح نہیں، ہم اسمیں آنے والی کمی کے Source کو نشان دہی کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ یہ بھی ہوسکتا ہے کہ ہمیں ایک نیا Formulation کرنا پڑے، نیا ریاضیاتی ماڈلنگ ایک ماڈلنگ طریقہ کی سائیکل ہوسکتی ہے جیسا کہ ذیل میں دئے گئے flow chart میں دکھایا گیا ہے: