باب **4**

5162CH04

ریاضی کے امالی اصول
(PRINCIPLE OF MATHEMATICS INDUCTION)

❖ تجزیہ اور طبیعات اپنے اہم ترین انکشافات کے لیے اس مفید ذریعہ کا مرہون منت ہے جو اسالہ (Induction) کے نام سے جانا جاتا ہے ۔نیوٹن اپنی بانومیل تھیورم اور آفاقی ثقل کے اصول کے لئے بھی اسی کا ممنون تھا۔ لیپلاس (LAPLACE) ❖

4.1 تعارف (Introduction)

ریاضی ایک سوچ میں معلوماتی وجوہات کا بہت بڑا ہاتھ ہے، ایک غیر اصولی اور معلوماتی وجوہات کی مثال سائنسی سوچ کے مطالعہ سے لی گئی ہیں، جو ایک دلیل (Argument) تین بیانوں میں دی گئی ہے۔

(a) سقراط (Socrates) ایک آدمی ہے۔

(b) سبھی آدمیوں کو مرنا ہے، اسلئے

(c) سقراط کو بھی مرنا ہے۔

جی۔ پینو
(1858-1932)

اگر بیانات (a) اور (b) درست ہیں، تو (c) کی سچائی ثابت ہوتی ہے، اس معمولی مثال کو ریاضیاتی بنانے کیلئے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

(i) 8، 2 سے تقسیم ہوتا ہے۔

(ii) کوئی بھی عدد جو 2 سے تقسیم ہوتا ہے جفت عدد ہے۔ اسلئے

(iii) 8 ایک جفت عدد ہے۔

اس لئے کھوج کو ایک خاص انداز میں اس طرح بھی کہتے ہیں : ایک بیان کو دیکر اسے ثابت کرنا انداز لگانا یا ریاضی میں ایک تھیورم (Theorem) کہلاتی ہے۔ کھوج کے صحیح اقدام اٹھائے جاتے ہیں اور ایک پروف یاتو مل جاتا ہے یا نہیں۔ اس طرح معلوماتی

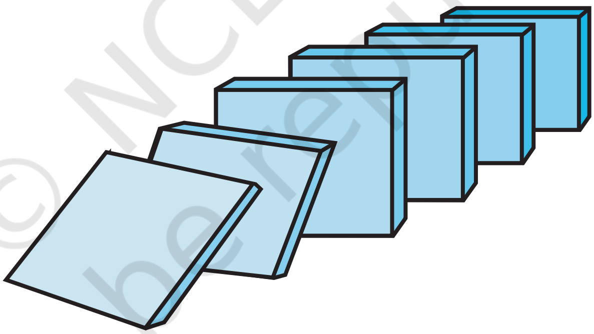
طریقه ایك عام مسئله سے خاص مسئله کی طرف لے جاتاہے۔

معلومات کے برعکس امالی سوچ ہر مسئلہ پر مبنی ہوتی ہے اور پھر ہر ایک مسئلہ کے بارے میں غور وفکر کر کے ایک اندازہ لگایا جاتا ہے۔ ریاضی میں اس کا استعمال بہت زیادہ ہے اور سائنسی سوچ میں ایک اہم کردار ادا کرتی ہے۔ جہاں ڈاٹا کو جمع کیا اور توڑا جاتا ہے۔ اسلیئے آسان زبان میں ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ امالہ کا مطلب ہے خاص مسئلہ یا اصلیت سے عام کی طرف بڑھنا۔

الجبرا یا ریاضی کی دوسری شاخوں میں بہت سے ایسے نتائج یا بیانات ہیں جنھیں ہم 'n' کا استعمال کر کے لکھتے ہیں جہاں n' 'ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ اس طرح کے بیانات کو ثابت کرنے کیلئے ایک اچھا اور موزوں اصول جو یہاں استعمال کیا گیا ہے، ایک خاص طریقہ پر مبنی ہے جسے ہم ریاضی کی امالی اصول کہتے ہیں۔

4.2 دلچسپی پیدا کرنا (Motivation)

ریاضی میں ہم ایک مکمل امالہ کی شکل کا استعمال کرتے ہیں جسے ہم ریاضی کا امالہ کہتے ہیں۔ ریاضی کے امالہ کا بنیادی اصول سمجھنے کے لیے مان لیجئے مستطیل پتلے ٹائیلوں کا ایک سیٹ ایک طرف رکھا ہے جیسا کہ شکل 4.1 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 4.1

جب ہم پہلے ٹائیل کو ایک خاص طرف دھکیلتے ہیں تو سبھی ٹائیل گر جاتے ہیں، مکمل طریقے سے یقین دہانی کیلئے کہ سبھی ٹائیل گر جائیں گے، یہ جاننا ضروری ہے کہ

(a) پہلا ٹائیل گر گیا، اور

(b) اس وقوع (event) میں کہ کوئی بھی ٹائیل گرتا ہے تو اس کے بعد کا بھی ہر حال میں گرے گا۔

یہ ریاضی کی امالہ کا انڈر لائن اصول ہے۔

ہم یہ جانتے ہیں کہ طبعی اعداد کا سیٹ، حقیقی اعداد کا ایک خاص مرتب ذیلی سیٹ ہے۔اصلیت میں R'N کا سب سے چھوٹا ذیلی سیٹ ہے جو ایک امالی سیٹ ہے۔اس سے یہ پتا چلتا ہے کہ R کوئی بھی ماتحت سیٹ جو کہ ایک امالی سیٹ ہے N اس میں موجود ہے۔

وضاحت

مان لیجئے ہم مثبت صحیح اعداد 1، 2، 3، ....، n، جوڑ کا فارمولہ معلوم کرنا چاہتے ہیں۔اس کا مطلب ہے وہ فارمولہ جو 1+2+3 کی قیمت دے جب n=3 ہو، قیمت 1+2+3+4 جب n=4 ہو اور اسی طرح آگے بڑھے اور مان لیجئے ہمیں کسی طرح سے یہ یقین ہو جائے کہ

فارمولہ $1+2+3+......n = \frac{n(n+1)}{2}$ صحیح فارمولہ ہے۔

حقیقت میں یہ فارمولہ کس طرح ثابت ہوا؟ اصلیت میں ہم اس بیان کی جانچ n کی مثبت صحیح قیمتیں لے کر کریں گے جتنی ہم جائیں گے، لیکن اس طریقہ سے n کی تمام قیمتیں ثابت نہیں کی جاسکتی ہیں۔ یہاں یہ درکار ہے کہ کسی طرح کا زنجیری تعامل (chain reaction) ہو جس کا یہ نتیجہ ہو کہ اگر یہ فارمولہ ایک خاص مثبت صحیح عدد کیلئے ثابت ہو گیا ہے تو یہ اس سے اگلے مثبت صحیح عدد کیلئے بھی ہوگا۔ اور اس سے اگلے مثبت صحیح عدد کیلئے بھی ہوگا اور آٹومیٹیکلی یہ فارمولہ لامحدود اعداد کیلئے بھی ہوگا۔

4.3 ریاضی کے امالی اصول (The Principle of Mathematical Induction)

مان لیجئے کوئی بیان P(n) دیا گیا ہے جو طبعی عدد n پر مبنی ہے اس طرح

(i) بیان $n=1$ کیلئے صحیح ہے *i.e* P(1) صحیح ہے اور

(ii) اگر بیان $n = k$ کیلئے صحیح ہے (جہاں کوئی مثبت صحیح عدد ہے) اس طرح بیان $n = k + 1$ کیلئے بھی درست ہے .i.e P(k) کی سچائی کا مطلب ہے P(k + 1) کی سچائی اس لئے P(*n*) تمام صحیح اعداد کے لئے درست ہے۔

حقیقت میں (i) ایک معمولی بیان ہے، کچھ اس طریقہ کے حالات بھی ہوں گے جب n >= 4 کیلئے بیان درست ہوگا۔ اگر اقدام (i) n=4 سے شروع ہو اور ہم اس نتیجہ کو n = 4 رکھ کر ثابت کریں P(4). i.e.

پراپرٹی (ii) حالات پر مبنی پراپرٹی ہے، اس سے یہ ظاہر نہیں ہوتا کہ دیا ہوا بیان n = k کے لئے درست ہے، تب یہ

n=k+1 کیلئے بھی درست ہوگا۔تو یہ ثابت کرنے کیلئے کہ یہ پراپرٹی صحیح ہے ہمیں صرف کنڈیشنل پروپوزیشن(Conditional proposition) کوثابت کرنا ہوگا۔

''اگر بیان n = k کیلئے درست ہے،تو یہ n = k = 1 کیلئے بھی درست ہوگا۔

اسے کبھی کبھی امالہ کا قدم بھی کہا جاتا ہے۔امالہ کے قدم میں یہ مان لینا کہ یہ بیان n = k کے لئے درست ہے امالہ کا مفروضہ(Inductive hypotesis) کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر ریاضی میں لگاتاراس فارمولے کی کھوج کی جاتی ہے جواس طریقہ میں موزوں ہو۔

$$1 = 1^2 = 1$$

$$4 = 2^2 = 1+3$$

$$9 = 3^2 = 1+3+5$$

$$16 = 4^2 = 1+3+5+7$$ وغیرہ

یہ بات نوٹ کرنے کی ہے کہ پہلے دوطبعی طاق اعداد کا جوڑ دوسرے طبعی عدد کے مربع کے برابر ہے، پہلے تین طبعی طاق اعداد کا جوڑ،تیسرے طبعی عدد کے مربع کے برابر ہے وغیرہ،اس طرح اس طریقہ سے ہمیں ملتا ہے

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1) = n^2$$

اس طرح پہلے'n' طبعی طاق اعداد کا جوڑ'n' کے مربع کے برابر ہے۔

ہمیں لکھنا ہے

$$P(n):\ 1+3+5+7+\ldots+(2n-1) = n^2$$

ہم یہ ثابت کرنا چاہتے ہیں کہ P(n) سبھی n کیلئے درست ہے۔

ریاضی کے امالہ(Mathematical Induction) میں اسے ثابت کرنے کیلئے سب سے پہلا قدم P (1) کوصحیح ثابت کرنا ہے۔ اس قدم کو بنیادی قدم کہتے ہیں عام طور پر $1 = 1^2$ اس کا مطلب P(I) صحیح ہے۔دوسرے قدم کو *Inductive Step* کہتے ہیں یہاں ہم یہ مان لیتے ہیں کہ P(k) کسی مثبت صحیح عدد 'K' کیلئے درست ہے اورہمیں اس کی ضرورت ہوتی ہے کہ ہم P(k + 1) کوبھی صحیح ثابت کریں۔

کیونکہ P(k) صحیح ہے۔ہمارے پاس ہے۔

$$1+3+5+7+...+(2k-1)=k^2 \quad (1)$$

مان لیجئے

$$1+3+5+7+...+(2k-1)+\{2(k+1)-1\} \quad (2)$$

$$=k^2+2(k+1)-1$$

$$=(k+1)^2$$

(1) کا استعمال کرنے پر

اس لئے P(k+1) صحیح ہے اور امالہ پروف اب مکمل ہے۔

اس لئے P(n) تمام طبعی اعداد 'n' کیلئے درست ہے۔

مثال 1 سبھی $n \geq 1$ ثابت کیجئے۔

$$1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

حل مان لیا دیا ہوا بیان P(n) ہے۔ اس لئے،

$$P(n): 1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n = 1$ کیلئے۔ $p(1):1=\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}=\frac{1\times2\times3}{6}=1$ جو کہ صحیح ہے۔

مان لیجئے P (k) کسی مثبت صحیح عدد 'k' کیلئے درست ہے۔

اس کا مطلب $^2+2^2+3^2+4^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ ....(1)

اب ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ P(k + 1) بھی درست ہے۔ اب ہمارے پاس ہے

$$\left(1^2+2^2+3^2+4^2+...+k^2\right)+(k+1)^2$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$ [(1) کو استعمال کرنے پر]

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+1+1)\{2(k+1)+1\}}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

اس لئے $P(k+1)$ صحیح ہے، جبکہ $P(k)$ درست ہو۔

اس لئے ریاضی کے امالی اصول سے بیان $P(n)$ تمام طبعی اعداد N کیلئے درست ہے۔

مثال 2 ثابت کیجئے کہ تمام مثبت صحیح اعداد 'n' کیلئے $2^n > n$

حل مان لیجئے $P(n)$: $2^n > n$

جب $n = 1$، $2^1 > 1$ اس لئے $P(1)$ درست ہے۔

مان لیجئے $P(k)$ تمام مثبت صحیح اعداد k کیلئے درست ہے

اس کا مطلب $2^k > k$ ....(1)

اب ہم یہ ثابت کریں گے $P(k+1)$ درست ہے جبکہ $P(k)$ درست ہے

(i) کو دونوں طرف 2 سے ضرب کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$2.2^k > k$$

$$2^{k+1} > 2 = k + k > k + 1$$

اس لئے $P(k+1)$ درست ہے جبکہ $P(k)$ درست ہے۔ اسلئے ریاضی کے امالی اصول سے بیان $P(n)$ سبھی طبعی اعداد 'n' کیلئے درست ہے۔

مثال 3 تمام $n \geq 1$ کیلئے ثابت کیجئے

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

حل ہم لکھتے ہیں $P(n): \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

ہم یہ نوٹ کرتے ہیں کہ $P(1): \frac{1}{1.2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$ جو صحیح ہے، اسلئے $n = 1$ کیلئے $P(n)$ درست ہے۔

مان لیجئے کسی بھی طبعی اعداد k کیلئے $P(k)$ درست ہے

اس سے ملتا ہے $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$ (1)

ہمیں یہ ثابت کرنے کی ضرورت ہے $P(k+1)$ درست ہے جب کہ $P(k)$ بھی درست ہو۔ ہمارے پاس ہے

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{k(k+1)}\right]+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$ [(1) کا استعمال کرنے پر]

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k^2+2k+2)}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+1+1}$$

اس لئے $P(k+1)$ درست ہے جبکہ $P(k)$ درست ہے، اس لئے ریاضی کی امالی اصول سے $P(n)$ تمام طبعی اعداد کے لئے درست ہے۔

مثال 4 تمام مثبت صحیح اعداد 'n' کیلئے ثابت کیجئے کہ $7^n - 3^n$، 4 سے تقسیم ہوتا ہے۔

حل ہم لکھتے ہیں $P(n): 7^n - 3^n$، 4 سے تقسیم ہوتا ہے

ہم نوٹ کرتے ہیں کہ

$P(n): 7^1 - 3^1 = 4$ جو کہ 4 سے تقسیم ہوتا ہے۔ اسلئے $n=1$ کیلئے $P(n)$ درست ہے۔

مان لیجئے کسی طبعی عدد k کیلئے $P(k)$ درست ہے۔

اس کا مطلب $P(k): 7^k - 3^k$، 4 سے تقسیم ہوتا ہے۔

ہم لکھ سکتے ہیں $7^k - 3^k = 4d$ جہاں $d \in \mathbf{N}$

اب ہماری یہ خواہش ہے کہ ہم یہ ثابت کریں کہ $P(k+1)$ درست ہے جبکہ $P(k)$ درست ہے

اب $\quad 7^{(k+1)}-3^{(k+1)}=7^{(k+1)}-7.3^{k}+7.3^{k}-3^{(k+1)}$

$$=7\left(7^{k}-3^{k}\right)+(7-3)3^{k}$$

$$=7(d)+(7-3)3^{k}$$

$$=7(4d)+4.3^{k}$$

$$=4\left(7d+3^{k}\right)$$

ہم آخری لائن سے یہ دیکھتے ہیں کہ $7^{(k+1)}-3^{(k+1)}$، 4 سے تقسیم ہوتا ہے۔اس لئے $P(k+1)$ درست ہے، جبکہ $P(k)$ درست ہے۔اس لئے ریاضی کے امالی اصول کا بیان تمام مثبت صحیح اعداد کیلئے درست ہے۔

مثال 5 تمام طبعی اعداد n' کیلئے ثابت کیجئے $(1+x)^{n}\geq(1+nx)$ جہاں $n>-1$

حل مان لیا $P(n)$ ایک دیا ہوا بیان ہے۔

$$P(n):\ (1+x)^{n}\geq(1+nx)\ n>-1$$

ہم یہ نوٹ کرلیں کہ $n=1$ کیلئے $P(n)$ درست ہے۔کیونکہ $(1+x)\geq(1+x)$ ہے $x>-1$ کیلئے

مان لیجئے $x>-1$, $(1+x)^{k}\geq(1+kn)$ صحیح ہے۔

ہم یہ ثابت کرنا چاہتے ہیں کہ $P(k+1)$ صحیح ہے $x>-1$ کیلئے جہاں $P(k)$ صحیح ہے۔...(2)

تماثل کو دیکھئے $(1+x)^{k+1}=(1+x)^{k}(1+x)$

دیا ہوا ہے $x>-1$ اس طرح $(1+x)>0$ اس لئے $(1+x)^{k+1}\geq(1+kx)$ کو استعمال کرکے ہمارے پاس ہے۔

$$(1+x)^{k+1}\geq(1+kx)(1+x)$$

$$(3)\ldots\ (1+x)^{k+1}\geq\left(1+x+kx+kx^{2}\right)$$

یہاں k ایک طبعی عدد ہے اور $x^{2}\geq0$ اس لئے $kx^{2}\geq0$ اس لئے

$$\left(1+x+kx+kx^2\right) \geq \left(1+k+kx\right)$$

اوراس طرح ہمیں ملتا ہے

$$\left(1+x\right)^{k+1} \geq \left(1+k+kx\right)$$

$$\left(1+x\right)^{k+1} \geq \left[1+\left(1+x\right)x\right]$$

اس لئے بیان (2) وجود میں آ گیا ہے۔اس طرح تمام طبعی اعداد کیلئے $P(n)$ درست ہے، ریاضی کے امالی اصول کی وجہ سے۔

مثال 6 ثابت کیجئے $2.7^n + 3.5^n - 5$، 4 سے تقسیم ہوتا ہے تمام $n \geq 1$ کیلئے

حل مان لیجئے، بیان $P(n)$ اس طرح ڈفائن ہوتا ہے۔

$2.7^n + 3.5^n - 5$، 24 سے تقسیم ہوتا ہے۔

ہم یہ نوٹ کرلیں کہ $P(n)$ صحیح ہے $n = 1$ کیلئے کیونکہ

$2.7 + 3.5 - 5 = 24$، جو کہ 24 سے تقسیم ہوتا ہے۔

مان لیجئے $P(k)$ درست ہے

$$(1).. \; 2.7^k + 3.5^k - 5 = 24q \quad q \in \mathbf{N}$$

اب ہماری یہ خواہش ہے کہ ہم یہ ثابت کریں کہ $P(k+1)$ صحیح ہے جب کہ $P(k)$ صحیح ہے۔

ہمارے پاس ہے

$$2.7^{k+1} + 3.5^{k+1} 5 = 2.7^k 7 + 3.5^k .5^1 - 5$$

$$= 7\left[2.7^k + 3.5^k - 5 - 3.5^k + 5\right] + 3.5^k .5 - 5$$

$$= 7\left[24q - 3.5^k + 5\right] + 15.5^k - 5$$

$$= 7 \times 24q - 21.5^k + 35 + 15.5^k - 5$$

$$= 7 \times 24q - 6.5^k + 30$$

$$= 7 \times 24q - 6\left(5^k - 5\right)$$

$$= 7 \times 24q - 6(4p)[(5^k - 5)$$ کا ضرب ہے 4 (کیوں؟)]

$$= 7 \times 24q - 24p$$

$$= 24(7q - p)$$

r کوئی طبعی عدد ہے $= 24 \times r, r = 7q - p$ ......(2)

دی ہوئی اظہار (2)q کی دائیں طرف R.H.S'24 سے تقسیم ہوتی ہے۔ اس لئے $P(k+1)$ درست ہی جبکہ $P(k)$ درست ہو۔

اس لئے ریاضی کی امالی اصول کی روح سے $P(n)$ تمام $n \in \mathbf{N}$ کیلئے درست ہے

اس لئے ریاضی کی امالی اصول کی روح سے $P(n)$ تمام $n \in \mathbf{N}$ کیلئے درست ہے

مثال 7 ثابت کیجئے کہ

$$1^3 + 2^2 + \ldots n^2 > \frac{n^3}{3}, n \in \mathbf{N}$$

حل مان لیجئے $P(n)$ دیا ہوا بیان ہے

$$P(n): 1^3 + 2^2 + \ldots n^2 > \frac{n^3}{3}, n \in \mathbf{N}$$

ہم یہ نوٹ کرلیں کہ $n=1$ کیلئے $P(n)$ درست ہے کیونکہ $1^2 > \frac{1^3}{3}$

مان لیجئے کہ $P(k)$ صحیح ہے

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 > \frac{k^3}{3} \quad \text{(i)}$$

اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ $P(k+1)$ درست ہے جبکہ $P(k)$ درست ہے

ہمارے پاس ہے

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 (k+1)^2$$

$$= \left(1^2 + 2^2 + \ldots + k^2\right) + (k+1)^2 > \frac{k^3}{3} + (k+1)^2$$

$$= \frac{1}{3}[k^3 + 3k^2 + 6k + 3]$$

$$=\frac{1}{3}\left[(k+1)^3+3k+2\right]>\frac{1}{3}(k+1)^2$$

اس لئے $P(k+1)$ بھی صحیح ہے جبکہ $P(k)$ صحیح ہو۔ اس لئے ریاضی کے امالی اصول کی روح سے تمام $n \in N$ کیلئے $P(n)$ درست ہے۔

مثال 8 ریاضی کے امالی اصول کی روح سے قوت نما کا اصول ثابت کیجئے۔

$$(ab)^n = a^n b^n$$

حل مان لیجئے $P(n)$ دیا ہوا بیان ہے۔

$$P(n): (ab)^n = a^n b^n$$

ہم یہ نوٹ کرلیں کہ $n=1$ کیلئے $P(n)$ درست ہے۔ کیونکہ $(ab)^1 = a^1 b^1$

مان لیجئے $P(k)$ درست ہے

$$(ab)^k = a^k b^k \quad (1)$$

ہم اب یہ ثابت کریں گے کہ $P(k+1)$ درست ہے جبکہ $P(k)$ درست ہو

اب ہمارے پاس ہے

$$(ab)^{k+1} = (ab)^k (ab)$$

$$=(a^k b^k)(ab) \quad \text{(i)...}$$

$$=(a^k.a^1)(b^k.b^1) = a^{k+1}.b^{k+1}$$

اس لئے $P(k+1)$ بھی درست ہے جبکہ $P(k)$ درست ہے۔ اس لئے ریاضی کے امالی اصول کی روح سے تمام $n \in N$ کیلئے $P(n)$ درست ہے۔

مشق 4.1

تمام $n \in N$ کیلئے مندرجہ ذیل کو ریاضی کے امالی اصول کا استعمال کر کے ثابت کیجئے۔

.1 $1.\ 1+3+3^2+...+3^{n-1}=\frac{(3^{n-1})}{2}$

.2 $$2.\ 1+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

.3 $$3.\ 1+\frac{1}{(1+2)}+\frac{1}{(1+2+3)}+\ldots+\frac{1}{(1+2+3+\ldots n)}=\frac{2n}{n+1}$$

.4 $$1.2.3+2.3.4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

.5 $$1.3+2.3^2+3.3^3+\ldots+n.3^n=\frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$$

.6 $$1.2+2.3+3.4+\ldots+(2n-1)(2n+1)=\left[\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right]$$

.7 $$1.3+3.5+5.7+\ldots+(2n-1)(2n+1)=\left[\frac{n(4n^2+6n-1)}{3}\right]$$

.8 $$1.2+2.2^2+3.2^2+\ldots+n.2^n=(n-1)2^{n+1}+2$$

.9 $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

.10 $$\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}$$

.11 $$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

.12 $$a+ar++ar^2+\ldots+ar^{n-1}=\frac{a(r^{n-1})}{r-1}$$

.13 $$\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\ldots\left(1+\frac{(2n+1)}{n^2}\right)=(n+1)^2$$

.14 $$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)=(n+1)$$

15. $$1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

16. $$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+...+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{(3n+1)}$$

17. $$\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+...+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n}{3(2n+3)}$$

18. $$1+2+3+...+n<\frac{1}{8}(2n+1)^2$$

19. $n(n+1)(n+5)$ 3 کا ضریب ہے۔

20. $10^{2n-1}+1$ ، 11 سے تقسیم ہوتا ہے۔

21. $x^{2x}-y^{2x}$ ، x + y سے تقسیم ہوتا ہے۔

22. x^{2n+2} $8n-9$ ، 8 سے تقسیم ہوتا ہے۔

23. 41^n-14^n ، 27 کا ضریب ہے

24. $(2x+7)<(x+3)$

خلاصہ (Summary)

◆ ریاضی کی سوچ کا تمام دار و مدار معلوماتی وجوہات پر مبنی ہے۔ معلومات کے برعکس امالی وجوہات مختلف کیسس پر کام کرنے اور اس بات کا اندازہ لگانے کے ہر ایک کیس کو بخوبی دیکھ لیا گیا ہے پر مبنی ہے۔ اس لئے آسان زبان میں ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ امالہ کا مطلب ہے ایک خاص کیس یا حقیقت عام کی طرف جانا۔

◆ بہت بڑی تعداد میں ریاضی کے بیانوں کو ثابت کرنے کے لئے ریاضی کے امالی اصول ایک بہت بڑا اوزار ہیں۔ اس طرح کا ہر بیان P(n) سے ملا ہوا ہے یہ مان لیا جاتا ہے جہاں 'n' ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ جس کیلئے n = 1 کے صحیح ہونے کو دیکھا جاتا ہے۔ پھر P(k) کی سچائی کو مان کر جہاں k ایک مثبت عدد ہے P(k + 1) کی سچائی کو ثابت کیا جاتا ہے۔

تاریخ کے اوراق سے

ریاضی کے دوسرے طریقوں اور تصورات کی طرح ریاضی کے امالہ کا ثبوت کسی ایک فرد کی ایجاد نہیں ہے نہ ہی یہ کسی خاص لمحہ میں ہوا۔ بنیادی طور پر ریاضی کے امالہ کا اصول Pythagoreans کو معلوم تھا۔

ریاضی کے امالہ کا اصول کا سہرا فرانسیسی ریاضی داں Blaise Pascal کے سر بندھتا ہے۔

نام امالہ کا استعمال انگریزی ریاضی داں John Wallis نے کیا بعد میں یہ اصول bionomial theorem کو ثابت کرنے کیلئے کیا گیا۔

De. Morgan نے ریاضی کے میدان میں بہت اکمپلشمینٹ دیں، وہ پہلا آدمی تھا جس نے ریاضی کے امالہ کو نام دیا اور اس کی تعریف بیان کی۔ اور De.Morgan اصول کو ریاضی کے سلسلہ کی کنورجن (Convergence) دیکھنے کیلئے ڈولپ کیا۔

۔۔۔۔۔صریح۔۔۔۔۔۔۔کے بیان کو مان کر طبعی اعداد کی خصوصیات کو پیش کرنے کا بیڑا اٹھایا جسے ہم اب Peano's Axioms کہتے ہیں۔ ریاضی کے امالی کا اصول Peamo's Axiom کے دوبارہ دیئے گئے بیان میں سے ایک ہے۔