باب 2

5162CH02

رشتے اور تفاعلات
(RELATIONS AND FUNCTIONS)

❖ ریاضی تمام طبعی تحقیق (*research*) میں ایک ضروری آلہ ہے

❖ BERTHELOT(برتھی لوٹ)

2.1 تعارف (Introduction)

جی۔ڈبلیو۔لیبنٹز
(1646-1716)

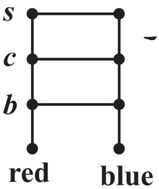
زیادہ تر ریاضی داں اشیاء کے درمیان تبدیلی کے طریقہ کو معلوم کرنے کی کھوج میں لگے ہوئے ہیں روزمرہ کی زندگی میں ہم بہت سے رشتوں کا سامنا کرتے ہیں۔ جیسے باپ بیٹے کا رشتہ، بہن بھائی، استاد اور طالب علم کا رشتہ وغیرہ۔ ریاضی میں بھی ہمیں بہت سے رشتوں کا سامنا کرنا پڑتا ہے جیسے عدد m عدد n سے چھوٹا ہے خط l خط m کے متوازی ہے، سیٹ A سیٹ B کا ذیلی سیٹ ہے۔ ان تمام میں ہم نوٹ کرتے ہیں کہ رشتوں میں اشیاء کا جوڑا ہوتا ہے جو کسی خاص ترتیب میں ہوتا ہے۔ اس باب میں ہم پڑھیں گے کہ کس طرح دو سیٹوں کے اشیاء کے جوڑوں کو ملایا جاتا ہے اور پھر ان میں کسطرح رشتہ پیدا کیا جاتا ہے۔ آخیر میں ہم کچھ خاص رشتوں کے بارے میں بڑھیں گے جو تفاعلات کو بتائیں گے۔ ریاضی میں تفاعلات کی سوچ بہت ضروری ہے کیونکہ یہ دو اشیاء کے درمیان ریاضیاتی تعلقات کو پیدا کرتی ہے۔

2.2 سیٹوں کا کارتیزی حاصل ضرب (Cartesian Product of Sets)

مان لیجئے A دو رنگوں کا سیٹ ہے اور ہمیں B، 3 چیزون کا سیٹ ہے۔

اس لئے {لال، نیلا} اور B={b,c,s}

جہاں b، c اور s ایک خاص قسم کے تھیلے کو ظاہر کرتے ہیں، کوٹ اور قمیں ان دو سیٹوں سے رنگین چیزوں کے کتنے سیٹ بن سکتے



شکل 2.1

ہیں؟ ایک خاص قسم کے طریقے سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس میں 6 مختلف جوڑے ہیں جو نیچے دیئے گے ہیں۔

(لال، b)، (لال، c)، (لال، s)، (نیلا، b)، (نیلا، c)، (نیلا، s)

اس طرح ہمیں 6 مختلف اشیا ملتی ہیں (شکل 2.1)

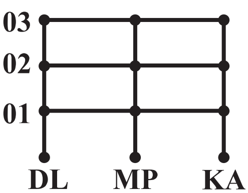
ہم نے جیسا کہ پچھلی جماعتوں میں پڑھا ہے کہ اگر دو سیٹ P اور Q سے عناصر کا ایک مرتب جوڑا لیا جائے تو اسے چھوٹے بریکٹ میں ایک خاص انداز میں جوڑا بنایا جائے اس لیے $p \in p$, (p,q) اور $q \in Q$ یہ مندرجہ ذیل تعریف کی طرف لے جاتا ہے۔

تعریف 1 P اور Q دو غیر خالی سیٹ دیئے ہوئے یہاں۔ کارتیزی حاصل ضرب P×Q ایک سیٹ ہوتا جس کے عناصر P اور Q سے حاصل شدہ تمام مرتب جوڑے ہوتے ہیں۔

اسطرح $P \times Q\{(p,q) : p \in P, q \in Q\}$

اگر P یا Q خالی سیٹ ہے تو $P \times Q$ بھی خالی سیٹ ہوگا اس طرح $P \times Q = \phi$ اور پر دی ہوئی مثال سے ہم نوٹ کرتے ہیں۔

A × B = {(لال، b), (لال، c)، (لال، s)، (نیلا، b)، (نیلا، c)، (نیلا، s)}



شکل 2.2

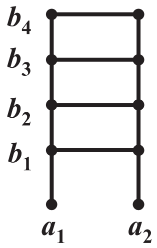
دوبارہ دو سیٹ لیجئے $A = \{DL, MP, KA\}$ جہاں DL، MP، KA دہلی مدھیا پردیش اور کرناٹک کو ظاہر کرتے ہیں اور $B = \{01, 02, 03\}$ وہ کوڈ میں جو ان شہروں کی لائسنس (Licence) پلیٹ کو ظاہر کرتے ہیں جو DL، PM اور KA سے شائع ہوتی ہیں۔

اگر تین راجیہ (states) دہلی۔ مدھیا پردیش اور کرناٹک گاڑیوں کی لائسنس پلیٹ کے لیئے کوڈ بنا رہے تھے جس کے ساتھ یہ بندش ہے کہ کوڈ سیٹ A کے ایک عنصر سے شروع ہو۔ جو جوڑے ان سیٹ سے دستیاب ہیں اور اس طرح کے کتنے جوڑے ہوں گے۔

دستیاب جوڑے یہ ہیں (DL,01)، (DL,02)، (DL,03)، (MP,01)، (MP,02)، (MP,03)، (KA,01)، (KA,02)، (KA,03) سیٹ A اور سیٹ B کے ضریب اس طرح ہے:

$$A \times B = \{(DL,01), (DL,02), (DL,03), (MP,01), (MP,02), (MP,03), (KA,01), (KA,02), (KA,03)\}$$

یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ کارتیزی حاصل ضرب میں اس طرح کے 9 جوڑے ہیں، کیونکہ سیٹ A اور سیٹ B دونوں میں 3-3 عناصر ہیں۔ یہ ہمیں 9 ممکن کوڈ دیتے ہیں یہ نوٹ کر لیجیے کہ جس طرح ان جوڑوں کو مرتب کیا گیا ہے یہ بہت ہی اہم ہے۔ مثال کے طور پر کوڈ DL,01 اور 01,DL یکساں نہیں ہے۔



شکل 2.3

آخری تصویری مثال اسطرح ہے۔ مان لیا دو سیٹ

$A = \{a_1, a_2\}$ اور $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_2, b_4)\}$$

اس طرح مستوی میں 8 مرتب جوڑے نقطوں کی نشان دہی کرتے ہیں اگر A اور B حقیقی اعداد کے سیٹ کے ذیلی سیٹ ہوں گے اور یہ بھی واقع ہے کہ نقاط (a_1, b_2) اور (b_2, a_1) کی جگہیں الگ ہیں۔

ریمارک

(i) دو مرتب جوڑے مساوی (برابر) ہوں گے، اگر اور صرف اگر جوڑون کے پہلے عناصر اور دوسرے عناصر آپس میں برابر ہوں۔

(ii) اگر A میں p عناصر ہوں اور B میں q ہوں تو $A \times B$ میں pq عناصر ہوں گے۔

اس طرح اگر $n(A) = p$ اور $n(B) = q$ ہو تو $n(A \times B) = pq$

(iii) اگر A اور B دو غیر خالی سیٹ ہیں اور A یا B ایک لامحدود سیٹ ہے۔ تب اسطرح $A \times B$ بھی لامحدود ہوگا۔

(iv) $A \times A \times A = \{(a, b, c) : a, b, c \in A\}$ یہاں (a, b, c) کو مرتب ٹکڑی کہیں گے۔

مثال 1 اگر $(x+1, y-2) = (3, 1)$ ہو تو x اور y کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل کیونکہ مرتب جوڑے مساوی (برابر) ہوتے ہیں، اس لیے میل رکھنے والے عناصر بی برابر ہوں گے۔

اس لیے $x + 1 = 3$ اور $y - 2 = 1$

حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $x = 2$ اور $y = 3$

مثال 2 اگر $P = \{a, b, c\}$ اور $Q = \{r\}$ تو سیٹ $P \times Q$ اور $Q \times P$ بنائیں کیا دونوں ضریب برابر ہیں؟

حل کارتیزی حاصل ضرب کی تعریف ہے۔

$P\times Q=\{(a,r),(b,r),(c,r)\}$ اور $Q\times P=\{(r,a),(r,b),(r,c)\}$

مرتب جوڑوں کی برابری کی تعریف سے ہمیں ملتا ہے کہ (a,r) اور (r,a) جوڑے برابر نہیں ہیں تو ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ

$P\times Q\neq Q\times P$

حالانکہ دونوں سیٹوں مین عناصر کی تعداد برابر ہوگی۔

مثال 3 مانا کہ $A=\{1,2,3\}$ ، $B=\{3,4\}$ اور $C=\{4,5,6\}$ تو معلوم کیجیے کہ:

(i) $A\times(B\cap C)$ (ii) $(A\times B)\cap(A\times C)$

(iii) $A\times(B\cup C)$ (iv) $(A\times B)\cup(A\times C)$

حل (i) تقاطع سیٹوں کی تعریف سے $(B\cap C)=\{4\}$

اس لئے $A\times(B\cap C)=\{(1,4),(2,4),(3,4)\}$

(ii) اب $(A\times B)=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3)(3,4)\}$

اور $(A\times C)=\{(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5)(2,6),(3,4),(3,5),(3,6)\}$

اس لئے $(A\times B)\cap(A\times C)=\{(1,4),(2,4),(3,4)\}$

(iii) کیونکہ، $(B\cup C)=\{3,4,5,6\}$

اس لئے ہمارے پاس ہے۔

$A\times(B\cup C)=\{(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$

مثال 4 اگر $P=\{1,2\}$ تو $P\times P\times P$ سیٹ بنائیے۔

حل ہمارے پاس ہے

$P\times P\times P=\{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(1,2,2),(2,1,1),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2)\}$

مثال 5 اگر R تمام حقیقی اعداد کا سیٹ ہے تو $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ اور $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ کا کارتیزی حاصل ضرب کیا ہوگا؟

حل $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ کا کارتیزی حاصل ضرب $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y):x,y\in\mathbf{R}\}$ سیٹ کو دکھاتا ہے۔

جو دو (Dimensional space) بعد جگہ کے مختص کو دکھاتی ہے۔

$\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ ، $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y,z):x,y,z\in\mathbf{R}\}$ کے سیٹ کو دکھاتا ہے۔ جو تین بعد جگہ (Three dimensional space) کے مختص کو دکھاتی ہے۔

مثال 6 اگر $A\times B=\{(p,q),(p,r),(m,q)(m,r)\}$ تو A اور B معلوم کیجیے۔

حل A= پہلے عناصر کا سیٹ $=\{p,m\}$

B= دوسرے عناصر کا سیٹ $=\{q,r\}$

مشق 2.1

.1 اگر $\left(\frac{x}{3}+1, y-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$ ہو تو x اور y کی قیمت معلوم کیجیے۔

.2 اگر سیٹ A میں تین عناصر ہوں اور سیٹ $B=\{3,4,5\}$ تو $(A\times B)$ میں عناصر کی تعداد معلوم کیجیے۔

.3 اگر $G=\{7,8\}$ اور $H=\{5,4,2\}$ تو $G\times H$ اور $H\times G$ معلوم کیجیے۔

.4 بتائیے کہ ذیل میں دیئے گئے بیانات درست ہیں یا غلط اگر بیانات غلط ہیں تو انہیں صحیح کر کے دوبارہ لکھے۔

(i) اگر $P=\{m,m\}$ اور $Q=\{n,m\}$ تو، $P\times Q=\{(m,n),(n,m)\}$

(ii) اگر A اور B دو غیر خالی سیٹ ہیں تب $A\times B$ مرتب جوڑوں کا ایک غیر خالی سیٹ ہوگا $y\in A$ اور $x\in B$ جبکہ (x,y)

(iii) اگر $A=\{1,2\}$ ، $B=\{3,4\}$ اور تب $A\times(B\cap\varnothing)=\varnothing$

.5 اگر $A\{-1,1\}$ تو $A\times A\times A$ معلوم کیجیے۔

.6 اگر $A\times B\{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y)\}$ تب A اور B معلوم کیجیے۔

.7 اگر $A=\{1,2\}$ ، $B=\{1,2,3,4\}$ ، $C=\{5,6\}$ اور $D=\{5,6,7,8\}$ تو تصدیق کیجیے کہ

(i) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ (ii) $A\times C\subset B\times D$

8. مان لیا $A=\{1,2\}$ اور $B=\{3,4\}$۔ $A\times B$ لکھئے $A\times B$ کے کتنے ماتحت سیٹ ہوں گے ان کی فہرست بنائیے۔

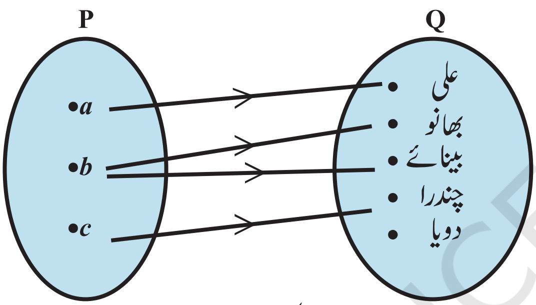
9. مان لیا A اور B دو سیٹ ہیں جبکہ $n(A)=3$ اور $n(B)=3$ اگر $(x,1)$،$(y,2)$،$(z,1)$ $A\times B$ میں موجود ہوں تو A اور B معلوم کیجئے جہاں x،y اور z غیر مشترک عناصر ہیں۔

10. کارتیزی حاصل ضرب $A\times B$ میں 9 عناصر ہیں۔ جس میں $(-1,0)$ اور $(0,1)$ موجود ہیں تو سیٹ A اور $A\times B$ کے باقی عناصر معلوم کیجئے۔

2.3 رشتے (Relations)

مان لیجئے دو سیٹ $P=\{a,b,c\}$ اور {علی، بھانو، بینائے، چندرا، دویا} = Q۔ P اور Q کا کارتیزی حاصل ضرب میں 15 مرتب جوڑے ہیں جنہیں اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$P\times Q$ = {(a،علی)،(a،بھانو)،(b،بینائے)،....،(c،دویا)}



شکل 2.4

اب ہم مرتب جوڑے (x,y) کے پہلے عنصر x اور دوسرے عنصر y میں ایک رشتہ R قائم کرکے $P\times Q$ کا ایک ذیلی سیٹ حاصل کر سکتے ہیں جیسے۔

$R=\{(x,y)$: x نام y کا پہلا حروف ہے۔ $x, x\in P, y\in Q\}$

اس طرح اس رشتہ R کو شکل 2.4 (جسے تیر والی شکل کہتے ہیں) R= {(a،علی)،(b،بھانو)،(b، بینائے)،(c،چندرا)} بخوبی دکھایا گیا ہے۔

تعریف 2 ایک رشتہ R ایک غیر خالی سیٹ A سے دوسرے غیر خالی سیٹ میں کارتیزی حاصل ضرب $A\times B$ کا ذیلی سیٹ ہے۔ ذیلی سیٹ اسطرح بنایا جاتا ہے جس میں مرتب جوڑے $A\times B$ میں پہلے اور دوسرے عنصر میں ایک رشتہ ہوتا ہے۔ دوسرے عنصر کو پہلے عنصر کا عکس (image) کہتے ہیں۔

تعریف 3 مرتب جوڑے کے تمام پہلے عناصر کے سیٹ رشتہ R میں سیٹ A سے B تک کو رشتہ R کا علاقہ کہتے ہیں۔

تعریف 4 رشتہ R میں تمام دوسرے عناصر کے سیٹ کو سیٹ A سے سیٹ B تک کو رشتہ R کی وسعت کہتے ہیں۔ مکمل سیٹ B رشتہ R کا ہم علاقہ (Codomain) کہلاتا ہے۔ یہ بات نوٹ کر لیجئے کہ ہم علاقہ ⊆ وسعت یعنی وسعت ہم علاقہ کا ذیلی سیٹ ہوتا ہے۔

ریمارک

(i) رشتہ کو ہم الجبری کے طور پر فہرستی شکل یا سیٹ ساز شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

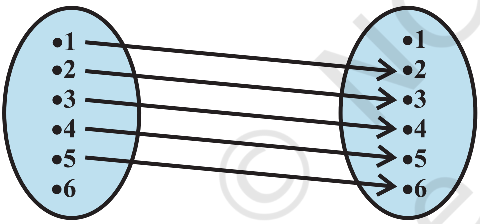
(ii) تیر والی شکل رشتہ کا دکھائی دینے والا انداز ہے۔

مثال 7 مان لیا $A=\{1,2,3,4,5,6\}$، ایک رشتہ R کو A سے A میں $R=\{(x,y):y=x+1\}$ کے ذریعہ معیّن کیجئے۔

(i) اس رشتے کو تیر والی شکل (arrow diagram) کے ذریعہ دکھائیے۔

(ii) R کے علاقہ کے ساتھ ہم علاقہ اور وسعت لکھئے۔

حل (i) رشتہ کی تعریف سے $R=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)\}$ کے مطابق بنی شکل (2.5) اسکی تیر والی شکل ہے۔



شکل 2.5

(ii) ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ علاقہ = $\{1,2,3,4,5\}$

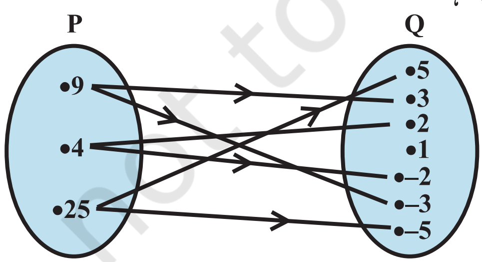
اسی طرح سعت = $\{2,3,4,5,6\}$

اور ہم علاقہ = $\{1,2,3,4,5,6\}$

مثال 8 شکل 2.6 میں سیٹ P اور Q کے درمیان ایک رشتہ دکھایا گیا ہے اس رشتہ کو۔

(i) سیٹ ساز شکل میں لکھئے

(ii) فہرستی شکل میں لکھئے اسکا علاقہ اور وسعت کیا ہے؟



شکل 2.6

حل یہ صاف طور پر ظاہر ہے کہ رشتہ R میں "x، y کا مربع ہے۔"

(i) سیٹ ساز شکل میں {x، y کا مربع ہے اور

$R=\{(x,y):y \in \phi,x$

(ii) فہرستی شکل میں

$$R=\{(9,-3),(9,3),(4,2),(4,-2),(25,5),(25,-5)\}$$

$\{4,9,25\}$ اس رشتہ کا حلقہ ہے۔

اس رشتہ کی وسعت $\{-2,2,-3,3,-5,5\}$ ہے۔

یہ بات نوٹ کر لیجئے کہ عنصر اسیٹ P کے کسی بھی عنصر سے نہیں جڑا ہوا ہے۔

سیٹ Q اس رشتہ کا ہم علاقہ ہے۔

نوٹ A سے B تک قائم ہونے والے تمام رشتوں کی کل تعداد A×B کے ممکن ذیلی سیٹس کی تعداد ہوتی ہے۔ اگر $n(A) = p$ اور $n(B) = q$ تب $n(A\times B) = pq$ اور رشتوں کی تعداد 2^{pq} ہے

مثال 9 فرض کیا $A=\{1,2\}$ اور $B=\{3,4\}$۔ A سے B کے درمیان رشتوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

حل ہم بناتے ہیں۔

$$A\times B=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$$

چونکہ $n(A\times B)=4$ اس لئے $(A\times B)$ کے ذیلی سیٹ کی تعداد 2^4 ہے۔ اس لئے A سے B تک رشتوں کی تعداد 2^4 ہوگی۔

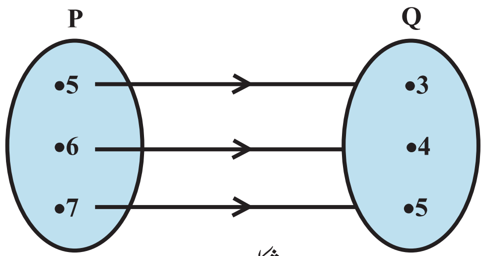
مشق 2.2

1. مان لیجئے $A=\{1,2,3,...,14\}$ A سے A میں رشتہ R اس طرح بتائیے کہ $\{(x,y):3x-y=0$ جہاں $x,y \in A\}$ اس کا علاقہ قریبی علاقہ اور وسعت لکھئے۔

2. ایک رشتہ R طبعی اعداد کے سیٹ N پر $\{(x,y):y=x+5$ ، x ایک طبعی عدد ہے اور 4 سے چھوٹا ہے۔ $x, y \in N\}$ اس کا علاقہ اور وسعت کے ذریعہ قائم کیجئے۔ اس رشتہ کو فہرستی طریقہ سے دکھایئے۔

3. $A=\{1,2,3,4,5\}$ اور $B=\{4,6,9\}$ ہے۔ A سے B میں ایک رشتہ R {x اور Y کا فرق طاق ہے اور $R=\{(x,y):x\in A,y\in B$ کے ذریعہ قائم کیجیے R کو فہرستی شکل میں لکھئے۔

4. شکل 2.7 میں سیٹ P اور سیٹ Q میں رشتہ دکھایا گیا ہے۔ اس رشتہ کو
(i) سیٹ ساز شکل میں
(ii) فہرستی شکل میں لکھئے: اس کا علاقہ اور وسعت معلوم کیجئے؟



شکل 2.7

5. مان لیا $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ ۔ رشتہ R، A پر اسطرح ہے کہ {a,b سے بالکل تقسیم ہوتا ہے $\{(a,b):a,b\in A$
(i) R کو فہرستی شکل میں لکھئے۔
(ii) R کا علاقہ معلوم کیجیے۔
(iii) R کی وسعت معلوم کیجیے۔

6. رشتہ R جس کی تعریف $\{0,1,2,3,4,5\}= \in x$ ، $R=\{x,x+5\}$ سے بیان کی گئی ہے اسکا علاقہ اور وسعت معلوم کیجیے۔

7. رشتہ R کے لئے جہاں {x ایک مفرد عدد ہے اور $x\angle 10$:$R=\{(x,x^3)$ فہرستی شکل میں لکھئے۔

8. مان لیا $A=\{x,y,z\}$ اور $B=\{1,2\}$ ۔ A سے B میں کتنے رشتے ہیں معلوم کیجیے۔

9. مان لیا رشتہ R، Z پر اس طرح ہے کہ {a-b ایک صحیح عدد ہے ,$R=\{(a,b): a,b\in Z$ کی وسعت اور علاقہ معلوم کیجیے۔

2.4 تفاعلات (Functions)

اس سیکشن میں ہم خاص رشتوں کے بارے میں پڑھیں گے جنھیں تفاعل (Function) کہا جاتا ہے یہ ریاضی میں ایک اہم تصور ہے۔ ہم تفاعل کو ایک اصول کے طور پر دیکھتے ہیں جو دیئے ہوئے عناصر سے ایک نئے عناصر نکالتا ہے۔ بہت سی

اصطلاحات ہیں جیسے نقشہ یا نقاشی جو تفاعل کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال ہوتی ہیں۔

تعریف 5 ایک رشتہ f ایک سیٹ A سے دوسرے سیٹ B میں تفاعل کہلاتا ہے اگر سیٹ A کا ہر ایک عنصر کی سیٹ B میں ایک اور صرف ایک ہی عکس یا نقش رکھتا ہو۔

دوسرے الفاظ میں تفاعل f ایک غیر خالی سیٹ A سے ایک غیر خالی سیٹ B میں وہ رشتہ ہے جبکہ f کا علاقہ A ہوا ور f کے کسی بھی دو مختلف مرتب جوڑوں میں پہلے اجزاء یکساں نہ ہوں۔

اگر f ایک تفاعل ہے سیٹ A سے B میں اور $(a,b) \in f$ تب $f\ (a)=b$ جہاں f کے ماتحت a کا b عکس ہے اور f ،a کے ماتحت b کی ماقبل (Preimage) وسعت ہے۔

تفاعل f کو A سے B میں اسطرح ظاہر کرتے ہیں $f : A \to B$

اگر ہم پچھلی مثالوں پر غور کریں تو ہم با آسانی یہ دیکھ سکتے ہیں کہ مثال 7 میں دیا گیا رشتہ تفاعل نہیں ہے کیونکہ عنصر 6 کی کوئی وسعت نہیں ہے۔

دوبارہ مثال 8 میں دیا گیا رشتہ بھی تفاعل نہیں ہے کیونکہ علاقہ میں موجود عنصر ایک سے زیادہ عکس سے جڑے ہوئے ہیں۔

اسی طرح مثال 9 میں بھی رشتہ ایک تفاعل نہیں ہے (کیوں؟) نیچے دی گئی مثالوں میں ہم دیکھیں گے کہ کچھ اور رشتے ہیں جو تفاعل ہیں اور کچھ نہیں ہیں۔

مثال 10 مان لیجئے **N** طبعی اعداد کا سیٹ ہے اور رشتہ **R** سیٹ **N** پر اسطرح دیکھایا گیا ہے کہ $R=\{(x,y):y=2x,x,y \in N\}$ اس کا علاقہ کیا ہے۔ ہم علاقہ اور R کی وسعت کیا ہے؟ کیا یہ رشتہ ایک تفاعل ہے۔

حل **R** کا علاقہ طبعی اعداد کا سیٹ **N** ہے ساتھی علاقہ بھی **N** ہے وسعت جفت طبعی اعداد کا سیٹ ہے۔ کیونکہ ہر طبعی اعداد n کا ایک اور صرف ایک عکس ہے۔ اسلئے یہ رشتہ ایک تفاعل ہے۔

مثال 11 نیچے دیئے گئے ہر رشتہ کی جانچ کیجئے اور بتائیے کہ ہر ایک میں کیا یہ تفاعل ہے یا نہیں؟

(i) $R=\{(2,1),(3,1),(4,2)\}$

(ii) $R=\{(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$

(iii) $R=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,7)\}$

حل (i) کیونکہ 2، 3، 4 R کے علاقہ کے عناصر میں جن کا عکس یکتا (Unique) ہے یہ رشتہ R ایک تفاعل ہے۔

(ii) کیونکہ یکساں پہلا عنصر 2 دو مختلف نقوش 2 اور 4 سے مطابقت رکھتا ہے۔ اس لئے یہ رشتہ تفاعل نہیں ہے

(iii) کیونکہ ہر عنصر کا صرف اور صرف ایک عکس ہے، اس لئے یہ رشتہ ایک تفاعل ہے۔

تعریف 6 ایک تفاعل جس کی وسعت حقیقی اعداد کا سیٹ R یا اس کا ذیلی سیٹ ہوتا ہے وہ حقیقی قیمت تفاعل (real valued function) کہلاتا ہے۔ مزید اگر اس کا علاقہ بھی R یا R کا ذیلی سیٹ ہوتا ہے تو یہ حقیقی تفاعل (Real function) کہلاتا ہے۔

مثال 12 مان لیجیے N ایک طبعی اعداد کا سیٹ ہے ایک (Real valued function) کو $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}\ by\ f(x) = 2x+1$ کی طرح Define کیا گیا ہے۔ اس تعریف کا استعمال کر کے ذیل Table کو پورا کیجیے۔

x	1	2	3	4	5	6	7
y	$f(1)=\ldots$	$f(2)=\ldots$	$f(3)=\ldots$	$f(4)=\ldots$	$f(5)=\ldots$	$f(6)=\ldots$	$f(7)=\ldots$

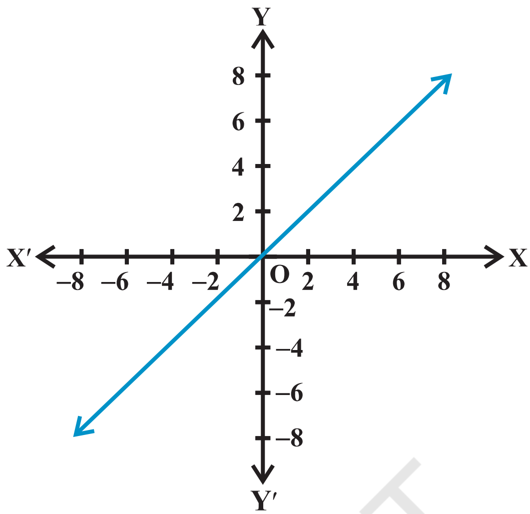
حل مکمل کی گئی Table نیچے دی گئی ہے۔

x	1	2	3	4	5	6	7
y	$f(1)=3$	$f(2)=5$	$f(3)=7$	$f(4)=9$	$f(5)=11$	$f(6)=13$	$f(7)=15$

2.4.1 کچھ تفاعلات اور ان کے گراف (Some Functions and their graphs)

(i) **تماثل تفاعل (Identity Function)** مان لیا R حقیقی اعداد کا ایک سیٹ ہے۔

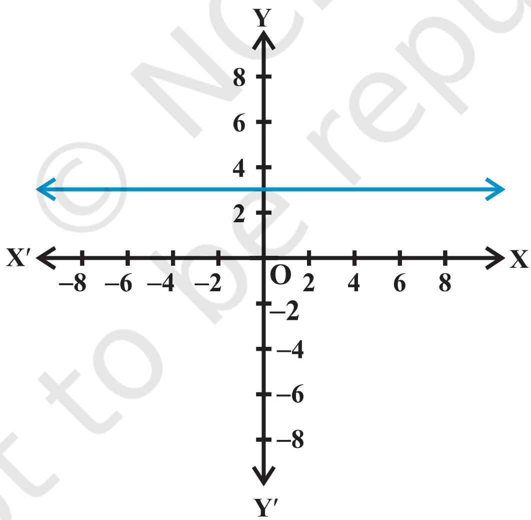
(Real valued function) کو اس طرح Define کیجیے کہ $f : R \rightarrow R\ by\ y = f(x) = x \quad x \in R$ اس طرح کے تفاعل کو تماثل تفاعل (Identity Function) کہتے ہیں یہاں کا علاقہ اور وسعت R ہے۔ گراف ایک خط مستقیم ہے (شکل 2.8) یہ مبدا (Origin) سے گزرتی ہے۔



$f(x) = x$

شکل2.8

(ii) مستقل تفاعل**(Constant function)** تفاعل f کو اسطرح define کیجئے



$f(x) = 3$

شکل2.9

$f : R \to R$ by $Y = f(x) = c$ جہاں $x \in \mathrm{R}$ ۔ جہاں c ایک مستقل ہے اور ہر ایک $x \in \mathrm{R}$ یہاں کا حلقہ

R ہے اور اسکی وسعت $\{c\}$

اس کا گراف x-axis کے متوازی خط ہے مثال کے طور پر اگر $f(x) = 3$ ہر ایک $x \in R$ کے ہو تب اسکا گراف ایک خط ہوگا جیسا کہ شکل 2.9 میں دکھایا گیا ہے۔

(iii) کثیر رکنی تفاعل **(Poly nomial function)** ایک f تفاعل $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ کو کثیر رکنی تفاعل کہیں گے اگر ہر ایک x in$\mathbf{R}$ کیلئے $y = f(x) = a_0 + a_1x + a_zx^2 + \ldots + a_nx^n$ جہاں n مثبت صحیح عدد ہے اور $a_0a_1a_2\ldots a_n \in \mathbf{R}$

تفاعل h جو $h(x) = x^{\frac{2}{3}} + 2x$ سے Define کیا گیا ہے کثیر رکنی تفاعل نہیں ہے (کیوں؟)

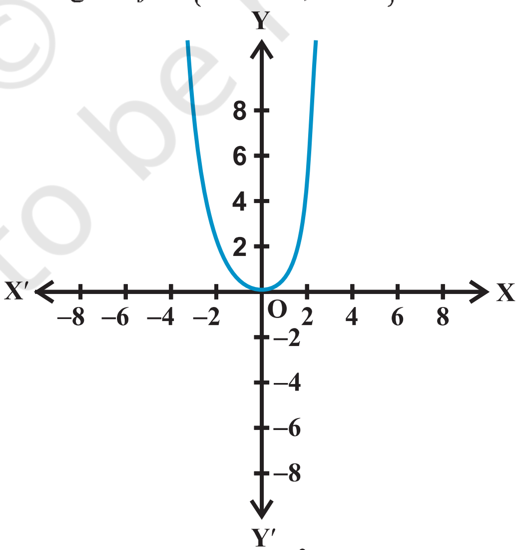
مثال 13 تفاعل f کو $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ اور $y = f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ سے بیان کیا گیا ہے۔ اس تعریف کو استعمال کرے مندرجہ ذیل Table کو مکمل کیجیے اس تفاعل کا علاقہ اور وسعت کیا ہے؟ f کا گراف کھینچئے۔

n	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$									

حل مکمل کئی گئی جدول نیچے دی گئی ہے:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Domain of $f = \{x : x \in \mathbf{R}\}$ Range of $f = \{x : x \leq 0, x \in \mathbf{R}\}$ The Graph of f is give by Fig: 2.10



$f(x) = x^2$

شکل 2.10

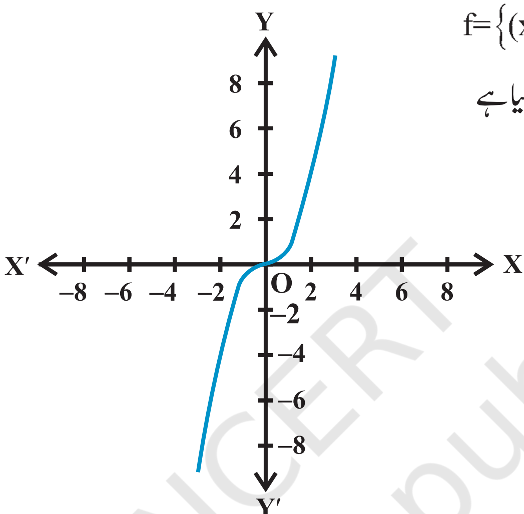
مثال 14 تفاعل $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ جو $f(x)=x^3, x\in\mathbf{R}$ سے define کیا گیا ہے کا گراف بنائیے

حل ہمارے پاس ہے۔

وغیرہ $f(0)=0, f(1)=1, f(-1)=-1, f(2)=8, f(-2)=-8, f(3)=27, f(-3)=-27$

اس لیے $f=\{(x,x^3): x\in R\}$

f کا گراف شکل 2.11 میں دیا گیا ہے



$f(x)=x^3$

شکل 2.11

(iv) ناطق تفاعل (**Rational Functions**) $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی طرح کے تفاعل ہوتے ہیں، جہاں $f(x)$ اور $g(x)$ (Polynomial functions) ہیں۔ اور ان کا حلقہ define کیا گیا ہے جہاں $g(x)\neq 0$

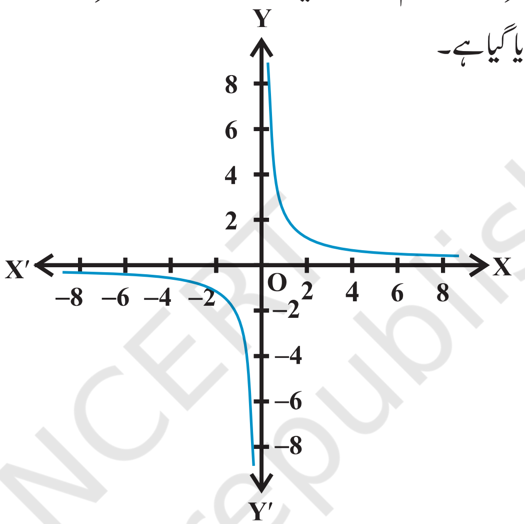
مثال 15 حقیقی قیمت تفاعل f اس طرح Define کیا گیا ہے $f:\mathbf{R}-\{0\}\to\mathbf{R}$، $f(x)=\frac{1}{x}$ جہاں $x\in\mathbf{R}-\{0\}$ اس تعریف کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل جدول کو مکمل کیجئے۔ اس تفاعل کی کا علاقہ اور وسعت کیا ہے؟

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y=\frac{1}{x}$									

حل مکمل کی گئی جدول اس طرح ہے۔

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y=\frac{1}{x}$	–0.5	–0.67	–1	–2	4	2	1	0.67	0.5

اس کا علاقہ صفر کے علاوہ تمام حقیقی اعداد ہیں اور اسکی وسعت بھی صفر '0' کے علاوہ تمام حقیقی اعداد کا سیٹ ہے۔ f کا گراف شکل 2.12 میں دکھایا گیا ہے۔



$f(x) = \frac{1}{x}$

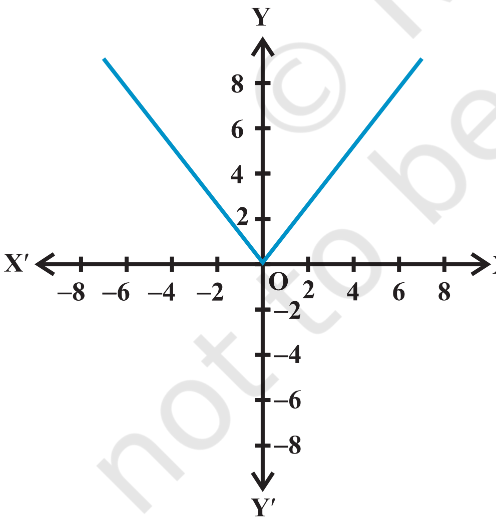
شکل 2.12

(v) مِقیاس تفاعل (The Modulus function)

تفاعل $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ جو $f(x)=|x|$ ہر $x \in \mathbf{R}$ کے لئے Define لے ایک مقیاس تفاعل کہلاتا ہے۔ x کی ہر مثبت قدر کے لیے $f(x)$، x کے برابر ہے لیکن x کی منفی قدر کے لیے۔ کی قدر کی منفی ہوگی۔ اس طرح

$$f(x)=\begin{cases} x, x \le 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$$

مقیاس تفاعل کا گراف شکل 2.13 میں دیا گیا ہے۔



$f(x) = |x|$

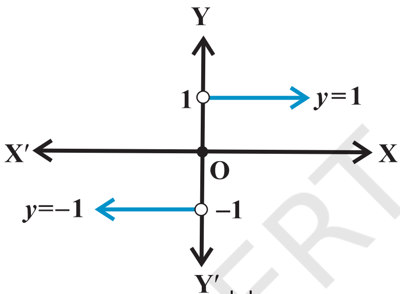
شکل 2.13

(vi) Signum fuction تفاعل $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ جس کو

واضح کیا جاتا ہے۔

$$f(x)=\begin{cases}1,\text{if } x>0\\ 0,\text{if } x=0\\ -1,\text{if } x<0\end{cases}$$

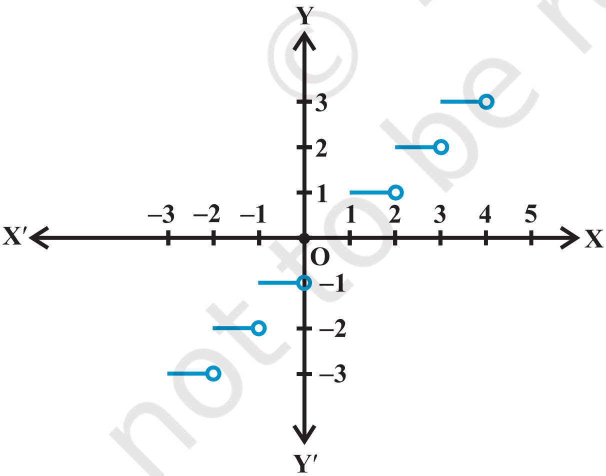
اسے Signum تفاعل کہتے ہیں۔ Signum تفاعل کا علاقہ **R** اور اسکی جو وسعت $\{-1,0,1\}$ ہے۔ Signum تفاعل کا گراف شکل 2.14 میں دکھایا گیا ہے۔



$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

شکل: **2.14**

(vii) سب سے بڑے صحیح اعداد کا تفاعل (**Greatest Integer**) تفاعل $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ جو Define کیا گیا ہے $f(n)=[x], x\in\mathbf{R}$ سب سے بڑے صحیح عدد جو چھوٹا ہے یا برابر x کے اس طرح کے تفاعل کو سب بڑے صحیح اعداد کا تفاعل کہا جاتا ہے۔



$f(x)=[x]$

شکل **2.15**

$[x]$ کی تعریف سے ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$[x]=-1 \text{ for } -1\le x<0$$
$$[x]=0 \text{ for } 0\le x<1$$
$$[x]=1 \text{ for } 1\le x<2$$

$$[x]=1 \text{ for } 2 \le x < 3 \ \ and\ so\ on$$

تفاعل کا گراف شکل 2.15 میں دیکھایا گیا ہے۔

2.4.2 حقیقی تفاعلات کا الجبرا (Algebra of Real functions)

اس سکیشن میں ہم پڑھیں گے کہ کسطرح دو حقیقی تفاعلات کو جمع کیا جاتا ہے۔ایک حقیقی تفاعل کو دوسرے حقیقی تفاعل سے کسطرح کھٹایا جاتا ہے۔ایک حقیقی تفاعل کو ایک عددیہ(Sealar) سے کس طرح ضرب کیا جاتا ہے(Scalav کا مطلب ہے ایک حقیقی نمبر) درحقیقی تفاعلات کی صرف اور ایک جفتی تفاعل کو دوسرے حقیقی تفاعل سے کس طرح تعلیم کیا جاتا ہے۔

(i) دو حقیقی تفاعلات کا جوڑا (Addition of two real functions) مان لیجئے $f: X \to \mathbf{R}$ اور $g: X \to \mathbf{R}$ حقیقی تفاعلات ہیں جہاں $X \subset \mathbf{R}$ تب $(f+g)(n): X \to \mathbf{R}$ by $(f+g)(n)$
$=f(x)+g(x)$ for all $x \in x$

(ii) ایک حقیقی تفاعل کو دوسرے حقیقی تفاعل سے تفریق کرنا (Subtraction of a real function from another)
مان لیا $f: X \to \mathbf{R}$ اور $g: X \to \mathbf{R}$ دو حقیقی تفاعلات ہیں جہاں $X \subset \mathbf{R}$ تب
$(f-g)X \to \mathbf{R}$ by $(f-g)(x) = f(x) - f(x)$ for all $x \in x$

(iii) ایک عددیہ سے ضرب کرنا (Multiplication by a Scalar) مان لیا $f: X \to \mathbf{R}$ ایک حقیقی قدر والا تفاعل ہے اور α ایک عددیہ ہے۔ یہاں ہمارے عددیہ سے مطلب ہے ایک حقیقی عدد۔تب αf کی ضرب ایک $X \to \mathbf{R}$ تک تفاعل ہوگا جسے ہم اسطرح Define کرتے ہیں۔ $(\alpha f)(x)=\alpha f(x), x \in X$

(iv) دو حقیقی تفاعلات کی ضرب (Multiplication of two real functions) دو حقیقی تفاعلات $f: X \to R$ اور $g: X \to R$ کی ضرب ایک تفاعل $fg: X \to R$ ہوگا جہاں $(fg)(x) \ \ =f(x)g(x): x \in X$ سے بیان کیا جائے۔

(v) دو حقیقی تفلاعلات کی خارج قیمی (Quotient of two real functions) مان لیجئے f اور g دو حقیقی تفاعلات ہیں جو $X \to \mathbf{R}$ سے define کے گئے ہیں اور $X \subset \mathbf{R}$، f اور g کا خارج قسمت $\frac{f}{g}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جو ایک تفاعل ہے اس طرح

$$\left\{\frac{f}{g}\right\}(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ provided \ \ g(x) \neq 0, x \in X$$

مثال 16 مان لیا $f(x)=x^2$ اور $g(x)=2x+1$ دو حقیقی تفاعلات ہیں۔

معلوم کیجیے $(f+g)(x), (f-g)x, (fg)x, \frac{f}{g}(x)$

حل ہمارے پاس ہے: $(f+g)x=x^2+2x+1$ $\quad$ $(f-g)x = x^2-2x-1$

$$(fg)x = x^2(2x+1)=2x^3+x^2 \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2}{2x^1}, x=\frac{-1}{2}$$

مثال 17 مان لیا $f(x)=\sqrt{x}$ اور $g(x)=x$ دو تفاعلات ہیں اور جنہیں حقیقی مثبت اعداد پر Define کیا گیا ہے۔

معلوم کیجیے $(f+g)x$ ، $(f-g)x$ ، $(fg)(x)$ اور $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

حل ہمارے پاس ہے: $(f+g)(x)=\sqrt{x+x}$ ،

$$(fg)x=\sqrt{x}(x)=x^{\frac{3}{2}} \text{ اور } \left(\frac{f}{g}\right)x=\sqrt{x}(x)=x^{\frac{1}{2}}, x\neq 0$$

مشق 2.3

1. مندرجہ ذیل رشتوں میں کون سے تفاعل ہیں؟ وجوہات بتائیے۔ اگر تفاعل ہوں تو ان کے علاقہ اور وسعت معلوم کیجیے۔

   (i) $\{(2,1),(5,1),(8,1),(11,1),(14,1),(17,1)\}$

   (ii) $\{(2,1),(4,2),(6,3),(8,4),(10,5),(12,6),(14,7)\}$

   (iii) $\{(1,3),(1,5),(2,5)\}$

2. درج ذیل حقیقی تفاعلات کی وسعت اور علاقہ معلوم کیجیے۔

   (i) $f(x)=-[x]$ $\quad$ (ii) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

3. ایک تفاعل f، $f(x)=2x-5$ سے define کیا گیا ہے۔ ان کی قدر لکھئے۔

   (i) $f(0)$ $\quad$ (ii) $f(7)$ $\quad$ (iii) $f(-3)$

4. ایک تفاعل ہے جو درجہ حرارت celsius کو درجہ حرارت Fahrenheit میں map کرتا ہے $t(C) = \frac{9c}{5} + 32$ سے ڈفائن کیا گیا ہے۔

معلوم کیجیے (i) $t(0)$ (ii) $t(28)$ (iii) $t(-10)$ (iv) t(c) کی قیمت جہاں $t(c) = -212$

5. مندرجہ ذیل تفاعلات کی وسعت معلوم کیجیے۔

(i) $f(x) = 2 - 3x, x \in \mathbf{R}, x > 0$

(ii) $f(x) = x^2 + 2$، x ایک حقیقی عدد ہے

(iii) $f(x) = x$، x ایک حقیقی عدد

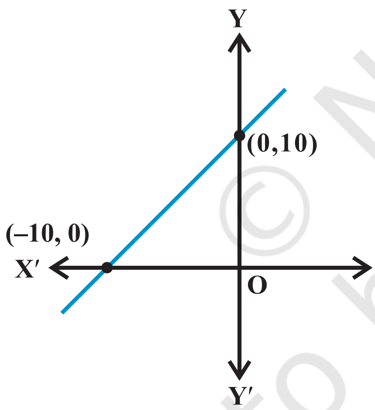
متفرق مثالیں

مثال 18 مان لیجیے R حقیقی اعداد کا ایک سیٹ ہے۔ حقیقی تفاعل کو اس طرح بیان کیا گیا۔

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ by $f(x) = x10$ اس تفاعل کا گراف کھینچیے۔

حل یہاں $f(0) = 10$، $f(1) = 11$، $f(2) = 12$ ، . . . . $f(10) = 20$ وغیرہ وغیرہ ہے اور $f(-1) = 9$، $f(-2) = 8$ ... $f(-10) = 0$ ہے اور اسی طرح آگے بڑھ رہا ہے۔

اس لیے دیئے ہوئے تفاعل کے گراف کی جو شکل بنتی ہے نیچے دی گئی ہے۔ شکل 1.16



$f(x) = x + 10$

شکل 2.16

ریمارک اس تفاعل کو خطی تفاعل یا سیدھا خط تفاعل کہتے ہیں۔

مثال 19 مانا کہ R، Q سے Q میں ایک رشتہ ہے جو کہ $a - b \in \mathbf{Z}$ اور $\mathbf{R} = \{(a,b) : a, b \in \mathbf{Q}\}$ پر مصروف ہے۔

تو دکھایئے کہ:

(i) تمام $a \in \mathbf{Q}$ کیلئے $(a,a) \in \mathbf{R}$

(ii) $(a,b) \in \mathbf{R}$ کا مطلب ہے $(b,a) \in \mathbf{R}$

(iii) $(a,b) \in \mathbf{R}$ اور $(b,c) \in \mathbf{R}$ کا مطلب ہے کہ $(a,c) \in \mathbf{R}$

حل (i) چونکہ $a - a = 0 \in \mathbf{R}$ اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ تمام $(a,a) \in \mathbf{R}$ کے لیے $(a,a) \in \mathbf{R}$ ہے۔

(ii) $(a,b) \in \mathbf{R}$ کا مطلب ہے کہ $a - b \in \mathbf{Z}$ اس لیے $b - a \in \mathbf{Z}$ اس لیے $(b,a) \in \mathbf{R}$

(iii) $(a,b) \in \mathbf{R}$ ، $(b,c) \in \mathbf{R}$ کا مطلب ہے کہ $a,b \in \mathbf{Z}$ ، $b - c \in \mathbf{Z}$ اس لیے

$(a - c = (a-b)+(b-c) \in \mathbf{Z}$ اس لیے $(a,c) \in \mathbf{R}$

مثال 20 مانا کہ $f = \{(1,1),(2,3),(0,-1),(-1,-3)\}$ ، Z سے Z میں ایک خطی تفاعل ہے۔

$f(n)$ معلوم کیجیے۔

حل کیونکہ f ایک خطی تفاعل ہے اس لیے $f(x) = mx + c$ ساتھ ہی کیونکہ $(1,1),(0,-1) \in R$ ،

$f(1) = m + c = 1$ اور $f(0) = c = -1$ اس سے ملتا ہے $m = 2$ اور $f(x) = 2x - 1$

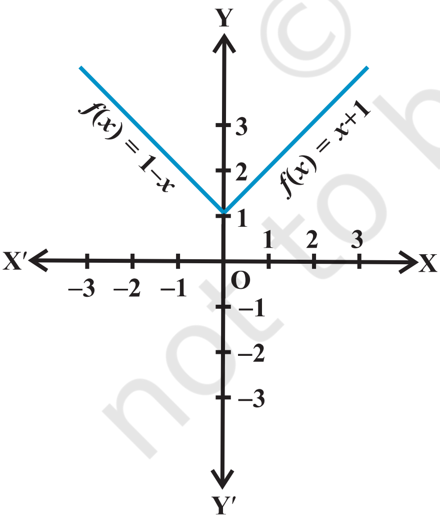
مثال 21 تفاعل $f(x) = \dfrac{x^2+3x+5}{x^2 \quad 5x+4}$ کا علاقہ معلوم کیجیے۔

حل کیونکہ $x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1)$ اس تفاعل f سبھی حقیقی اعداد کے لئے مصروف ہوگا ضرف $x = 4$ اور $x=1$ کو چھوڑ کر۔ اس لیے f کا علاقہ $\mathbf{R} - \{1,4\}$

مثال 22 تفاعل f کو اس طرح ڈفائن کیا گیا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, x < 0 \\ 1 \quad\quad , x = 0 \\ x + 1, x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ کا گراف کھینچیے۔



شکل 2.17

حل یہاں $f(x) = 1 - x, x < 0$ جس سے حاصل ہوتا ہے۔

$$f(-4) = 1 - (-4) = 5;$$

$$f(-3) = 1 - (-3) = 4$$

$$f(-2) = 1 - (-2) = 3$$

$$f(-1) = 1 - (-1) = 2;$$

اور $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4$

$f(4) = 5$ اور اسی طرح $f(x) = x + 1, x > 0$.

اس طرح f کا گراف شکل 1.17 میں دیکھایا گیا ہے۔

متفرق مشق

.1 رشتہ f اس طرح ڈفائن کیا گیا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 3 \\ 3x, 3 \le x \le 10 \end{cases}$$

رشتہ g اس طرح ڈفائن کیا گیا ہے $f(x) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 2 \\ 3x, 2 \le x \le 10 \end{cases}$

دکھایئے f ایک تفاعل ہے اور g ایک تفاعل نہیں ہے۔

.2 اگر $f(x) = x^2$ تو $\dfrac{f(1.1) - f(1)}{(1.1) - 1}$ معلوم کیجیے۔

.3 تفاعل $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 8x + 2}$ کا حلقہ معلوم کیجیے۔

.4 حقیقی تفاعل f جو $f(x) = \sqrt{(x-1)}$ ڈفائن کیا گیا ہے اس کا حلقہ اور وسعت معلوم کیجیے۔

.5 حقیقی تفاعل f جو $f(x) = |x - 1|$ سے ڈفائن کیا گیا ہے۔ اس کا حلقہ اور وسعت معلوم کیجیے۔

.6 مانا کہ $f = \left\{\left(x, \dfrac{x^2}{1+x^2}\right), x \in \mathbf{R}\right\}$ ایک $\mathbf{R}$ سے $\mathbf{R}$ میں ایک تفاعل ہے f کی وسعت معلوم کیجیے۔

7. مان لیجئے کہ $f, g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ سے مصرف ہے اور بالترتیب $f(x) = x+1$,$g(x) = 2x-3$ تو $f+g$,$f-g$ اور $\frac{f}{g}$ معلوم کیجئے۔

8. مان لیجئے $f = \{(1,1), (2,3), (0,-1), (-1,3)\}$ ، **Z** سے **Z** میں ایک تفاعل ہے جسکا مفرف $f(x) = ax+b$ سے دکھایا گیا ہے a، b دو صحیح اعداد ہیں a،b معلوم کیجئے۔

9. مان لیجئے **N** سے **N** میں **R** ایک رشتہ ہے جو $\mathbf{R} = \{(a,b) : a, b \in \mathbf{N}, 1a = b^2\}$ سے معرف ہے۔ کیا مندرجہ ذیل صحیح ہیں۔

(i) $(a,a) \in \mathrm{R}, : \forall a \in N$

(ii) $(a,b) \in \mathrm{R}$, implis $(b,a) \in \mathrm{N}$

(iii) $(a,b) \in \mathrm{R}, (b,c) \in \mathrm{R}$ implis $(a,c) \in \mathrm{R}$

پر Care میں اپنے جواب وضاحت کیجئے۔

10. مان لیجئے $\mathrm{A} = \{1,2,3,4\}$ ، $\mathrm{B} = \{1,5,9,11,15,16\}$

اور $\mathrm{f} = \{(1,5), (2,9), (3,1), (4,5), (2,11)\}$

کیا ذیل صحیح ہیں۔

(i) F، A سے B میں ایک رشتہ ہے۔

(ii) F، A سے B میں ایک تفاعل ہے۔

ہر کیس (Case) میں اپنے جواب کی وضاحت کیجئے۔

11. مان لیا، $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ کا ذیلی سیٹ ہے جو معرف ہے $f = \{(ab, a+b) : a, b \in \mathbf{Z}\}$ ہے۔ کیا f، **Z** سے **Z** تک تفاعل ہے؟ اپنے جواب کی وصاحت کیجئے۔

12. مان لیجئے $\mathrm{A} = \{9,10,11,12,13\}$ اور $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ کو n کا سب سے بڑا مفرد اجزائے ضربی $f(x)$ سے ڈفائن کیا گیا ہے f کی وسعت معلوم کیجئے۔

خلاصہ (Summary)

اس باب میں ہم نے رشتوں اور تفاعلات کا مطالعہ کیا ہے۔ اس باب کے اہم پہلو یہ ہیں:

- **مرتب جوڑا** (Ordered Pair): عناصر کا ایک جوڑا جو ایک خاص ترتیب میں رکھا ہو۔
- **دو سیٹس** A اور B کا کارتیزی حاصل ضرب اس طرح دیا جاتا ہے۔

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

خصوصاً $$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$$

اور $$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = (x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{R}\}$$

- اگر $(x, y) = (a, b)$ تب $a = x$ اور $b = y$
- اگر $n(A) = p$ اور $n(B) = q$ تب $n(A \times B) = pq$
- $A \times \phi = \phi$
- عموماً $A \times B \neq B \times A$
- A سے B کا ایک رشتہ R کارتیزی حاصل ضرب A×B کا ایک ذیلی سیٹ ہوتا ہے جو A×B کے مرتب جوڑے کے پہلے عنصر x اور دوسرے عنصر y کے درمیان ایک رشتہ بیان کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔
- رشتہ **R** کے تحت کسی عنصر x کا **عکس** یا نقش y ہوتا ہے جبکہ $(x, y) \in R$
- رشتہ **R** کا **علاقہ** یا حلقہ (Domain) **R** کے تمام مرتب جوڑوں کے پہلے عناصر کا سیٹ ہوتا ہے۔
- رشتہ **R** کی **وسعت** (Range) **R** کے تمام مرتب جوڑوں کے دوسرے عناصر کا سیٹ ہوتا ہے
- **تفاعل**: سیٹ **A** سے سیٹ **B** کا تفاعل f ایک مخصوص قسم کا رشتہ ہوتا ہے جس میں سیٹ **A** کے ہر عنصر x کا ایک اور صرف

ایک نقش سیٹ **B** میں y ہوتا ہے۔اس کو اس طرح لکھا جاتا ہے $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ جبکہ $f(x) = y$

- **A** تفاعل f کا علاقہ اور **B** اس کا ہم علاوہ کہلاتا ہے۔
- تفاعل کی وسعت اور اس کے تمام نقوش کا سیٹ ہوتا ہے۔
- حقیقی تفاعل میں حقیقی اعداد کا سیٹ R یا اس کا ذیلی سیٹ یا دونوں اس کا علاقہ یا وسعت ہوتے ہیں۔
- **تفاعلات کا الجبرا:** تفاعل $f : \mathrm{X} \to \mathbf{R}$ اور تفاعل $g : \mathrm{X} \to \mathbf{R}$ کے لئے الجبرا اس طرح دیا جاتا ہے۔

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), x \in \mathrm{X}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x), x \in \mathrm{X}$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x), x \in \mathrm{X}$$

$$(kf)(x) = k\, f(x), \in \mathrm{X}$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in \mathrm{X}, g(x) \neq 0$$

تاریخ کے اوراق سے

لفظ FUNCTION سب سے پہلے گوٹفریڈ ولہم لیبنٹز (1716-1646) کی 1673 میں لکھی لاطینی دستاویز "Methodus tangentium inversa, seu de fuctionibus" میں پایا گیا۔اس نے تفاعل کو ریاضیاتی فعل اور منحنی کو محض کارگذار کے طور پر تصور کیا۔

5/جولائی 1698 کو جون برنولی نے پہلی بار لیبنز کو ایک خط لکھ کر تفاعل کی اصطلاح کو قصداً تجزیاتی معنی میں خاص طور پر استعمال کرنے کی ہدایت کی۔اسی ماہ کے آخر میں لیبنز نے اپنے جواب میں اس کی منظوری کا اظہار کر دیا۔

انگریزی کے 1779 کے چیمبرس سایلوپیڈیا میں فنکشن (FUNCTION) ملتا ہے۔تجزیائی عبارات میں ''جو کسی طریقہ سے ایک متغیر مقدار اور اعداد یا مستقلہ مقداروں سے مرتب کی گئی ہوں'' کے لئے الجبرے میں اس اصطلاح (تفاعل) کا استعمال ہوتا ہے۔